



## Mathematics Exhibition 2019

(Kalkulus - Teori Bilangan - Kombinatorika)

### Petunjuk pengerjaan:

1. Isilah terlebih dahulu nama, asal perguruan tinggi dan nomor kelompok peserta yang diberikan oleh panitia.
2. Ujian ini terdiri dari dua bagian. Ujian bagian pertama terdiri dari 30 soal yang akan dikerjakan oleh masing-masing anggota kelompok selama 120 menit, sedangkan ujian bagian kedua terdiri dari 4 soal yang dikerjakan bersama-sama dalam satu kelompok selama 30 menit.
3. Setelah soal bagian pertama selesai dikerjakan dan dikumpulkan kepada pengawas, peserta disilakan untuk istirahat sampai dipanggil kembali oleh panitia untuk mengerjakan soal kedua secara berkelompok (satu kelompok terdiri dari dua orang).
4. Untuk soal-soal bagian pertama, tuliskan hanya jawaban akhirnya saja pada kotak yang disediakan. Jawaban yang dikehendaki adalah jawaban benar yang terbaik. Soal dapat dikerjakan pada lembaran lain yang diberikan oleh panitia.
5. Untuk soal-soal bagian kedua, tuliskan jawaban Anda lengkap dengan argumentasi dan penjelasan.
6. Setiap soal pada bagian pertama bernilai 4 bila benar dan 0 bila salah, sedangkan setiap soal pada bagian kedua maksimal bernilai 10.
7. Gunakan pena atau pulpen. Pensil hanya boleh digunakan untuk gambar atau sketsa.
8. Jika tempat yang tersedia tidak mencukupi pada soal bagian kedua, gunakanlah halaman di belakangnya.
9. Bekerjalah dengan cepat, tetapi cermat dan teliti. Anda sama sekali tidak diperkenankan menggunakan penghapus cair.
10. Di akhir test, kumpulkan berkas soal ini secara utuh.

# MATHEMATICS EXHIBITION

"We are The Elements of Surprise"



Nama: \_\_\_\_\_ Asal: \_\_\_\_\_ Kelompok: \_\_\_\_\_

### Soal Isian Singkat

1. Apakah pernyataan berikut benar/salah: Terdapat bilangan asli $n$ sedemikian sehingga untuk semua $x > 0$ , $x > \frac{1}{n}$ .	<input style="width: 100%; height: 40px;" type="text"/>
2. Tentukanlah semua $x \in \mathbb{R}$ yang memenuhi $ 3x - 2  < 4$ dan $ x - 1  > 3$ secara bersama-sama.	<input style="width: 100%; height: 40px;" type="text"/>
3. Hitunglah $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{6-5x+x^2}}$	<input style="width: 100%; height: 40px;" type="text"/>
4. Diberikan $F(x) = \frac{x^2-16}{x+6-5\sqrt{x}}$ . Sebutkan $x$ dimana $F$ tidak terdefinisi dan definisikan nilai $F(x)$ yang mungkin sehingga fungsi $F$ kontinu di $x$ tersebut.	<input style="width: 100%; height: 40px;" type="text"/>
5. Carilah daerah dimana turunan $h(x) = x x $ ada, dan tentukan turunannya.	<input style="width: 100%; height: 40px;" type="text"/>
6. Tentukan titik-titik ekstrim relatif untuk fungsi $f(x) = \sqrt{x} - 2\sqrt{x+2}$ , untuk $x > 0$ .	<input style="width: 100%; height: 40px;" type="text"/>
7. Misalkan $f(x) = 2$ , untuk $0 \leq x < 1$ , $f(1) = 3$ , dan $f(x) = 1$ , untuk $1 < x \leq 2$ . Tentukan nilai integral $f$ pada $[0,2]$ .	<input style="width: 100%; height: 40px;" type="text"/>



<p>8. Tentukan <math>p</math> sehingga <math>\int_0^{\infty} \frac{1}{x^p} dx</math> adalah divergen</p>	<input type="text"/>
<p>9. Misalkan <math>a_n = \frac{\sin(n\pi/2)}{n}</math>. Jika <math>\{b_n\}</math> adalah barisan bilangan riil terbatas, tentukan <math>\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n</math>.</p>	<input type="text"/>
<p>10. Hitunglah nilai dari <math>\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} \sin y}{2y} = \dots</math></p>	<input type="text"/>
<p>11. Misalkan <math>f</math> terdefinisi pada <math>R = \{(x,y) :  x  \leq 1,  y  \leq 2\}</math>, dengan <math>f(x,y) = x^2 + y</math>. Tentukan nilai maksimum dan minimum <math>f</math> pada <math>R</math>.</p>	<input type="text"/>
<p>12. Apakah fungsi <math>f</math> yang didefinisikan sebagai <math>f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}</math>, <math>(x,y) \neq (0,0)</math> dan <math>f(0,0) = 0</math>, terdiferensialkan di <math>(0,0)</math>?</p>	<input type="text"/>
<p>13. Diberikan <math>F(x,y) = \log(x + e^y)</math>. Tentukan koefisien dari <math>(x-1)^2</math> pada deret Taylor untuk <math>F</math> disekitar titik <math>(1,0)</math>.</p>	<input type="text"/>
<p>14. Hitunglah volume bagian ruang yang berada di dalam dua tabung <math>x^2 + y^2 = c^2</math> dan <math>x^2 + z^2 = c^2</math>.</p>	<input type="text"/>
<p>15. Misalkan <math>C</math> adalah lingkaran satuan <math>x^2 + y^2 = 1</math>, dengan arah berlawanan jarum jam. Hitunglah integral garis <math>\int_C [\sqrt{1+x^2} - ye^{xy} + 3y] dx + [x^2 - xe^{xy} + \log(1+y^4)] dy</math></p>	<input type="text"/>



16. Jika $(x - \frac{1}{x})^{50}$ diuraikan menjadi bentuk polinomial maka tentukanlah koefisien dari suku $x^{30}$ .	<input type="text"/>
17. Sebuah pesta dihadiri oleh $n$ pasang suami istri, semua orang akan bersalaman dengan setiap orang yang hadir paling banyak satu kali, dan tidak bersalaman dengan pasangannya. Tentukanlah berapa banyak pasangan suami istri yang hadir apabila banyak salaman yang terjadi adalah 1624.	<input type="text"/>
18. Tentukan banyaknya bilangan yang mengandung tepat 1 buah angka 6, 1 buah angka 5, dan 1 buah angka 9 dari 100.000 bilangan bulat positif pertama.	<input type="text"/>
19. Lima buah dadu (enam muka) akan dilempar satu demi satu, kemudian hasil kelima angka mata dadu yang muncul akan dikalikan. Berapa banyak kemungkinan kelima angka mata dadu yang muncul bila hasil kali adalah 180.	<input type="text"/>
20. Jika $\frac{p}{q}$ adalah bentuk penulisan dari bilangan rasional $7,6791179117911\dots$ , dimana $p$ dan $q$ adalah bilangan bulat yang saling prima dengan $q \neq 0$ , maka tentukanlah nilai dari $p - q$ .	<input type="text"/>
21. Untuk menonton petunjukan di sebuah gedung,	<input type="text"/>



<p>empat pasang suami istri membeli karcis untuk 8 kursi sebaris. Dua orang akan duduk bersebelahan hanya jika keduanya pasangan suami istri atau berjenis kelamin yang sama. Tentukan banyak cara menempatkan ke empat pasang suami istri ke delapan kursi tersebut apabila kursi paling pinggir ditempati oleh suami.</p>	
<p>22. Tentukan nilai <math>n</math> terbesar sehingga <math>27^n</math> membagi <math>33^{50}</math>.</p>	<input type="text"/>
<p>23. Tentukan solusi <math>x</math> dan <math>y</math> dari sistem kongruen linier berikut,</p> $3x + 4y \equiv 5 \pmod{13}$ $2x + 5y \equiv 7 \pmod{13}.$	<input type="text"/>
<p>24. Jika <math>n</math> adalah bilangan bulat, maka hitunglah nilai <math>n</math> dari bentuk persamaan <math>315 C_3^n = C_2^{n-1} \times C_2^{2n+1}</math>.</p>	<input type="text"/>
<p>25. Hitunglah nilai dari <math>2019^{2021^{2013}} \pmod{10}</math>.</p>	<input type="text"/>
<p>26. Terdapat sebuah nomor telepon <math>abcd - efgh</math>. Sebuah nomor telepon yang mudah diingat adalah sebuah nomor yang memenuhi <math>abc = efg</math> atau <math>abc = fgh</math>. Dalam hal ini, masing-masing huruf <math>a, b, c, d, e, f, g</math> dan <math>h</math> menyatakan satu digit dari nomor telepon tersebut. Hitunglah ada berapa banyak nomor telepon yang mudah diingat.</p>	<input type="text"/>



27. Diberikan sebuah barisan bilangan bulat positif yang mana untuk  $i$  bilangan asli, bilangan ke- $i$  pada barisan ini merupakan hasil kali dari  $(1 + 2 + \dots + (i - 1) + i)$  dengan bilangan pertama pada barisan ini. Jika jumlah 15 bilangan pertama pada barisan ini adalah 6120, maka tentukanlah bilangan kedupuluhnya.

28. Hitunglah banyaknya bilangan asli yang kurang dari 5000 dimana jumlah digit-digitnya sama dengan 20.

29. Diberikan sebuah himpunan bilangan bulat positif  $A = \{1, 4, 8, 13, 17, 19, 21, 25, 36, 44, 49, 53, 56, 62, 65, 76, 85, 89, 91, 95\}$ . Berapa paling sedikit bilangan yang harus diambil dari himpunan tersebut, agar dapat dipastikan setidaknya terdapat dua bilangan berbeda yang mempunyai selisih habis dibagi 19.

30. Hitunglah banyaknya faktor positif dari bilangan 264600 yang habis dibagi oleh bilangan 420.



Kelompok: \_\_\_\_\_ Nama: 1. \_\_\_\_\_ Asal: \_\_\_\_\_  
2. \_\_\_\_\_

### Soal Essay

1. Perhatikan fungsi  $f(x) = \frac{x-9}{\sqrt{x-3}}$ ,  $x \geq 0, x \neq 9$ , dan  $f(9) = 6$ . Jika  $\epsilon = 0,01$ , carilah  $\delta$  sedemikian sehingga  $|f(x) - f(9)| < 0,01$  untuk setiap  $x$  yang memenuhi  $|x - 9| < \delta$ .

**Jawab:**

# MATHEMATICS EXHIBITION

"We are The Elements of Surprise"



2. Tentukanlah  $x$  yang memenuhi  $f'(x) = \frac{3}{2}$ , jika  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$ ,  
 $x \neq 0$  dan  $f(0) = 0$ .

**Jawab:**



3. Hitunglah banyaknya pembagi positif dari bilangan  $n$ , dimana  $n$  merupakan bilangan bulat terbesar sehingga  $n^n$  adalah pembagi dari  $27^{27^{27}}$ .

**Jawab:**



4. Pada suatu kebun binatang terdapat 452 ekor hewan. Hewan-hewan itu hanya berkaki dua atau berkaki empat. Ada 164 ekor hewan yang memakan daging dan 196 ekor hewan yang tidak memakan sayuran. Pada hewan yang memakan sayuran, jumlah hewan berkaki empat 40 lebih sedikit dari hewan berkaki dua. 104 ekor hewan dimana 38 ekor diantaranya berkaki empat memakan daging dan memakan sayuran. 86 ekor hewan berkaki dua tidak memakan keduanya. Duapertiga dari jumlah hewan yang memakan daging tapi tidak memakan tumbuhan adalah hewan berkaki dua.
- Berapa banyak hewan yang hanya memakan sayuran saja.
  - Berapa banyak hewan berkaki dua dan hewan berkaki empat di kebun binatang tersebut.
  - Berapa banyak kaki hewan pemakan daging.

**Jawab:**