PENGENALAN KONSEP-KONSEP DALAM RING MELALUI PENGAMATAN

Disampaikan dalam
Lecture Series on Algebra
Universitas Andalas
Padang, 29 September 2017

Indah Emilia Wijayanti

Departemen Matematika FMIPA
Universitas Gadjah Mada
Yogyakarta Indonesia

October 24, 2017

Latar Belakang

Hal-hal yang sudah diketahui mahasiswa sebelum mempelajari ring:

- Grup merupakan suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi suatu operasi biner dan memenuhi beberapa aksioma.
- Contoh-contoh grup adalah $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, dan $(M_{2\times 2}(\mathbb{R}), +)$.
- Perhatikan bahwa dalam $\mathbb{Z}$ dijumpai juga operasi lain, yaitu operasi perkalian bilangan-bilangan bulat.

Sifat-sifat operasi perkalian dalam $\mathbb{Z}$

- operasi perkalian di $\mathbb{Z}$ bersifat assosiatif, yaitu

$$(n_1 \cdot n_2) \cdot n_3 = n_1 \cdot (n_2 \cdot n_3),$$

  untuk setiap $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$;
- operasi penjumlahan dan perkalian bersifat distributif kiri dan distributif kanan, yaitu

$$n_1 \cdot (n_2 + n_3) = (n_1 \cdot n_2) + (n_1 \cdot n_3)$$

  dan

$$(n_1 + n_2) \cdot n_3 = (n_1 \cdot n_3) + (n_2 \cdot n_3),$$

  untuk setiap $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$.

Apakah $\mathbb{Z}$ dengan operasi perkalian juga grup?

Beberapa fakta dalam $\mathbb{Z}$:

- Operasi perkalian dalam $\mathbb{Z}$ komutatif.
- Ada bilangan 1 yang berperan sebagai elemen satuan untuk operasi perkalian.
- Tetapi ada bilangan bulat yang tidak mempunyai invers, misalnya 2 dan 3.

Jadi $(\mathbb{Z}, \cdot)$ bukan grup, melainkan semigrup.

Definisi

Himpunan tak kosong $(S, *)$ disebut semigrup jika operasi biner $*$ bersifat asosiatif.

Apakah $\mathbb{Q}$ dengan operasi perkalian juga grup?

Beberapa fakta dalam $\mathbb{Q}$:

- Operasi perkalian dalam $\mathbb{Q}$ komutatif.
- Ada bilangan 1 yang berperan sebagai elemen satuan untuk operasi perkalian.
- Bilangan rasional yang tidak mempunyai invers adalah 0.

Jadi $(\mathbb{Q}, \cdot)$ bukan grup.

Apakah $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dengan operasi perkalian juga grup?

Beberapa fakta dalam $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

- Operasi perkalian dalam $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tidak komutatif.
- Ada matriks identitas I yang berperan sebagai elemen satuan untuk operasi perkalian.
- Banyak matriks yang tidak mempunyai invers, yaitu matriks dengan determinan 0.

Jadi $(M_{2\times 2}(\mathbb{R}), \cdot)$ bukan grup.

Apakah $2\mathbb{Z}$ dengan operasi perkalian juga grup?

Beberapa fakta dalam $2\mathbb{Z}$:

- Operasi perkalian dalam $2\mathbb{Z}$ komutatif.
- Tidak ada bilangan genap yang berperan sebagai elemen satuan untuk operasi perkalian.

Jadi $(2\mathbb{Z}, \cdot)$ bukan grup.

Pengertian Ring

Himpunan tak kosong R yang dilengkapi dua operasi biner $\oplus$ dan $*$ disebut **ring** jika memenuhi sifat:

1. $(R, \oplus)$ merupakan grup komutatif;
2. operasi $*$ di R bersifat assosiatif, yaitu

$$\forall r_1, r_2, r_3 \in R, (r_1 * r_2) * r_3 = r_1 * (r_2 * r_3).$$

3. operasi penjumlahan dan perkalian di R bersifat:
   a. distributif kiri:

   $$\forall r_1, r_2, r_3 \in R, r_1 * (r_2 \oplus r_3) = (r_1 * r_2) \oplus (r_1 * r_3),$$

   b. distributif kanan:

   $$\forall r_1, r_2, r_3 \in R, (r_1 \oplus r_2) * r_3 = (r_1 * r_3) \oplus (r_2 * r_3).$$

$$(\mathbb{Z}, +, \cdot) \dashrightarrow \dashrightarrow \dashrightarrow (R, \oplus, *)$$

Setelah proses abstraksi dicari contoh-contoh ring yang lain.
Bagaimana cara mencari contoh yang lain?
Bagaimana dengan contoh-contoh grup yang sudah diketahui, yaitu

$$(\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (M_{2\times 2}(\mathbb{R}), +).$$

Apakah mereka juga ring?

Mengembangkan contoh (1)

1. Himpunan matriks berukuran 2×2 yaitu $(M_{2\times2}(\mathbb{R}), +, \cdot)$, adalah ring.
2. Himpunan matriks berukuran 3×3 yaitu $(M_{3\times3}(\mathbb{R}), +, \cdot)$, adalah ring.
3. Himpunan matriks berukuran $n \times n$ yaitu $(M_{n\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$, adalah ring.

Mengembangkan contoh (2)

1. Himpunan semua bilangan bulat $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah ring.
2. Himpunan hasil kali Cartes semua bilangan bulat $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah ring, dengan operasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} (a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d), \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (a \cdot c, b \cdot d). \end{aligned}$$

3. Bagaimana dengan $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$?

Contoh Ring

Perhatikan grup komutatif $(\mathbb{R}, +)$. Dibentuk himpunan semua fungsi dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$, yaitu

$$\mathrm{Fun}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \ f \text{ homomorfisma grup}\}.$$

Dengan operasi penjumlahan berikut

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$(\mathrm{Fun}(\mathbb{R}), +)$ merupakan grup komutatif. Lebih lanjut, dapat didefinisikan operasi komposisi $\circ$ pada $\mathrm{Fun}(\mathbb{R})$ berikut:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

untuk setiap $x \in G$.

Sifat distributif

$$
\begin{aligned}
((f+g)\circ h)(x) &= (f+g)(h(x)) = (f\circ h)(x) + (g\circ h)(x)\\
(h\circ (f+g))(x) &= h(f(x)+g(x)) = (h\circ f)(x) + (h\circ g)(x).
\end{aligned}
$$

Jadi $(\mathrm{Fun}(\mathbb{R}), +, \circ)$ merupakan ring.

Diberikan grup komutatif $(G, +)$. Dibentuk himpunan semua endomorfisma dari G ke G, yaitu

$$\mathrm{End}(G) = \{f : G \to G \mid \ f \text{ homomorfisma grup}\}.$$

Sudah diketahui bahwa $(\mathrm{End}(G), +)$ merupakan grup komutatif. Lebih lanjut, dapat didefinisikan operasi komposisi $\circ$ pada $\mathrm{End}(G)$ berikut:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

untuk setiap $x \in G$. Dapat ditunjukkan bahwa $(\mathrm{End}(G), +, \circ)$ merupakan ring.

Jenis-jenis Ring

1. Ring R disebut **ring komutatif** jika R komutatif terhadap perkalian, yaitu untuk setiap $r, s \in R$ berlaku $rs = sr$.
2. Ring R disebut **ring dengan elemen satuan** jika R mempunyai elemen satuan terhadap perkalian, yaitu terdapat $1_R \in R$ sehingga untuk setiap $r \in R$ berlaku $r1_R = 1_R r = r$.
3. Ring R disebut **ring pembagian (division ring)** jika R mempunyai elemen satuan dan setiap elemen tak nol di R mempunyai invers terhadap perkalian, yaitu untuk setiap elemen tak nol r di R, terdapat r^{-1} di R sehingga $rr^{-1} = r^{-1}r = 1_R$.
4. Ring R disebut **lapangan** jika R ring pembagi yang komutatif.

Contoh Jenis-jenis Ring

1. Ring $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan ring komutatif, namun tidak mempunyai elemen satuan.
2. Ring matriks $(M_{2\times 2}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ merupakan ring dengan elemen satuan berupa matriks identitas I_2. Ring matriks $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ bukan ring komutatif.
3. Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot)$, dan $(\mathbb{C}, , +, \cdot)$ masing-masing merupakan ring komutatif dengan elemen satuan.
4. Ring $(\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot)$, dan $(\mathbb{C}, , +, \cdot)$ masing-masing merupakan contoh lapangan. $\square$

Bagaimana mengenalkan subring?

1. Apa motivasinya?
2. Bagaimana mengabstraksikan ide sehingga sampai pada definisi?
3. Bagaimana menemukan contoh-contoh lain?

Fakta : ada ring di dalam ring

- $2\mathbb{Z}$ adalah ring di dalam $\mathbb{Z}$.
- $M_2(2\mathbb{Z})$ adalah ring di dalam $M_2(\mathbb{Z})$.
- Himpunan semua bilangan ganjil

$$1 + 2\mathbb{Z} = \{1 + 2n \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

  merupakan himpunan bagian tak kosong dari $\mathbb{Z}$ tetapi bukan merupakan ring.

Pengertian subring

Definisi

Diberikan S himpunan bagian tak kosong dari ring $(R,+,\cdot)$. Himpunan S disebut **subring** R jika S juga merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian yang sama pada ring R.

Apakah setiap kali akan membuktikan subring harus mengecek semua aksiomanya?
Bagaimana kita memanfaatkan fakta bahwa subring adalah ring di dalam ring?

Mengamati syarat subring di dalam ring

- Diketahui S adalah himpunan bagian tak kosong di R.
- Adakah sifat R yang diwariskan ke S? Asosiatif dan distributif.
- Untuk menjadi ring, syarat apa yang harus dipenuhi S? $(S, +, \cdot)$ harus merupakan ring terhadap operasi yang sama dengan operasi di R.
- $(S, +)$ harus merupakan subgrup di R dan $(S, \cdot)$ harus merupakan subsemigrup di R.

Syarat apa saja yang perlu dicek?
Operasi $+$ dan $\cdot$ harus tertutup di S.

Proposisi

Diberikan himpunan tak kosong S di dalam ring $(R, +, \cdot)$. Himpunan S merupakan subring dari R jika dan hanya jika untuk setiap $s_1, s_2 \in S$ berlaku sifat:

(i). $s_1 - s_2 \in S$;
(ii). $s_1 \cdot s_2 \in S$.

Contoh Subring

Himpunan matriks segitiga atas

$$T_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \mid a_{11}, a_{12}, a_{22} \in \mathbb{R} \right\}$$

merupakan subring dalam $(M_{2\times 2}(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Contoh-contoh subring

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Pembentukan Ring Faktor

Diberikan R ring dan S subring. Dari teori grup sudah diketahui grup faktor $(R/S, +)$ juga merupakan grup komutatif, dengan

$$R/S = \{\bar{r} \mid r \in R\} = \{r + S \mid r \in R\}.$$

Selanjutnya, muncul pertanyaan apakah dapat dibentuk operasi perkalian $\cdot$ pada R/S, yaitu:

$$\cdot : R/S \times R/S \to R/S,$$

sedemikian hingga $(R/S, +, \cdot)$ juga merupakan ring.

Latar Belakang Definisi Ideal

- Akan dicek apakah operasi $\cdot$ tersebut *well-defined* atau tidak.
- Misalkan $\overline{r_1}, \overline{r_2}, \overline{r_1'}, \overline{r_2'} \in R/S$ dengan $\overline{r_1} = \overline{r_1'}$, dan $\overline{r_2} = \overline{r_2'}$. Akan dicek apakah $\overline{r_1} \cdot \overline{r_2} = \overline{r_1'} \cdot \overline{r_2'}$, yang artinya $\overline{r_1 r_2} = \overline{r_1' r_2'}$.
- Ekuivalen dengan mengecek

$$r_1 - r_1' \in S \text{ dan } r_2 - r_2' \in S \Rightarrow r_1 r_2 - r_1' r_2' \in S.$$

- Ekuivalen dengan menunjukkan apakah jika $r_1 - r_1' = s_1$ dan $r_2 - r_2' = s_2$ untuk suatu $s_1, s_2 \in S$, maka akan berakibat $r_1 r_2 - r_1' r_2' = s_3$ untuk suatu $s_3 \in S$.

Dengan demikian akan diperoleh

$$\begin{aligned} r_1 r_2 - r_1' r_2' &= (s_1 + r_1')(s_2 + r_2') - r_1' r_2' \\ &= (s_1 s_2 + s_1 r_2' + r_1' s_2 + r_1' r_2') - r_1' r_2' \\ &= s_1 s_2 + s_1 r_2' + r_1' s_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Jelas $s_1 s_2 \in S$, tetapi $s_1 r_2'$ dan $r_1' s_2$ belum tentu berada dalam S. Dapat disimpulkan bahwa operasi $\cdot$ pada R/S belum tentu *well-defined*.

Definisi

Misalkan R suatu ring tak nol dan I adalah himpunan bagian tak kosong di R. Himpunan I disebut **ideal** dari R jika

1. untuk setiap $s_1, s_2 \in I$, berlaku $s_1 - s_2 \in I$;
2. untuk setiap $s_1 \in I$ dan $r \in R$, berlaku $s_1 r, rs_1 \in I$.

Contoh Ideal

1. Himpunan $2\mathbb{Z}$ merupakan ideal di ring $\mathbb{Z}$.
2. Secara umum, untuk setiap $k \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$, $k\mathbb{Z} = \{kn \mid n \in \mathbb{Z}\}$ merupakan ideal di ring $\mathbb{Z}$.
3. Himpunan $M_{2\times 2}(2\mathbb{Z})$ merupakan ideal di ring $M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$.
4. Tetapi $\mathbb{Z}$ BUKAN ideal di $\mathbb{Q}$, dan $\mathbb{Q}$ BUKAN ideal di $\mathbb{R}$.

Kesimpulan : tidak setiap subring merupakan ideal.

Ring Faktor

Definisi

Jika I merupakan ideal dalam ring R, maka R/I merupakan ring terhadap operasi:

1. penjumlahan $+$ dengan definisi

$$\overline{r_1} + \overline{r_2} = \overline{r_1 + r_2},$$

   untuk setiap $\overline{r_1}, \overline{r_1} \in RI$; dan

2. perkalian $\cdot$ dengan definisi

$$\overline{r_1} \cdot \overline{r_2} = \overline{r_1 \cdot r_2},$$

   untuk setiap $\overline{r_1}, \overline{r_1} \in RI$.

Contoh Ring Faktor

Misal diambil ring bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dan ideal $2\mathbb{Z}$ di ring $\mathbb{Z}$. Mudah dipahami bahwa hanya ada dua koset dari ideal $2\mathbb{Z}$, yaitu koset $0 + 2\mathbb{Z}$ dan $1 + 2\mathbb{Z}$. Dengan demikian, diperoleh ring faktor

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0 + 2\mathbb{Z}, 1 + 2\mathbb{Z}\}$$

dengan

$$\begin{aligned}
(0 + 2\mathbb{Z}) + (0 + 2\mathbb{Z}) &= (0 + 0) + 2\mathbb{Z} = 0 + 2\mathbb{Z} \\
(1 + 2\mathbb{Z}) + (1 + 2\mathbb{Z}) &= (1 + 1) + 2\mathbb{Z} = 0 + 2\mathbb{Z} \\
(0 + 2\mathbb{Z}) + (1 + 2\mathbb{Z}) &= (0 + 1) + 2\mathbb{Z} = 1 + 2\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(0 + 2\mathbb{Z}) \cdot (0 + 2\mathbb{Z}) &= (0 \cdot 0) + 2\mathbb{Z} = 0 + 2\mathbb{Z} \\
(1 + 2\mathbb{Z}) \cdot (1 + 2\mathbb{Z}) &= (1 \cdot 1) + 2\mathbb{Z} = 1 + 2\mathbb{Z} \\
(0 + 2\mathbb{Z}) \cdot (1 + 2\mathbb{Z}) &= (0 \cdot 1) + 2\mathbb{Z} = 0 + 2\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Ideal Kiri dan Ideal Kanan

Definisi

Misalkan R suatu ring tak nol dan I adalah himpunan bagian tak kosong di R. Himpunan I disebut **ideal kiri** dari R jika

1. untuk setiap $s_1, s_2 \in I$, berlaku $s_1 - s_2 \in I$;
2. untuk setiap $s_1 \in I$ dan $r \in R$, berlaku $rs_1 \in I$.

Definisi

Misalkan R suatu ring tak nol dan I adalah himpunan bagian tak kosong di R. Himpunan I disebut **ideal kanan** dari R jika

1. untuk setiap $s_1, s_2 \in I$, berlaku $s_1 - s_2 \in I$;
2. untuk setiap $s_1 \in I$ dan $r \in R$, berlaku $s_1 r \in I$.

Motivasi : Hubungan $\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Q}$

- $\mathbb{Z}$ adalah subring $\mathbb{Q}$.
- Struktur $\mathbb{Z}$ adalah daerah inegral, $\mathbb{Q}$ adalah lapangan.
- Sebagai daerah integral, tidak setiap elemen $\mathbb{Z}$ mempunyai invers.
- Sebagai bagian dari lapangan $\mathbb{Q}$, setiap elemen $\mathbb{Z}$ mempunyai invers.

Peristiwa tersebut dinamakan **penyisipan** $\mathbb{Z}$ ke $\mathbb{Q}$. Apakah sebarang daerah integral dapat disisipkan ke dalam suatu lapangan?

Hubungan $\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Q}$ (lanjutan)

- Himpunan $\mathbb{Q}$ dapat dinyatakan sebagai:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$$

- Pandang anggota-anggota $\mathbb{Q}$ sebagai pasangan berurutan anggota $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dengan komponen kedua tak nol.
- Bagaimana dengan $(2, 3)$ yang merepresentasikan $\frac{2}{3}$ dan $(4, 6)$ yang merepresentasikan $\frac{4}{6}$? Dalam $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ keduanya berbeda, tetapi dalam $\mathbb{Q}$ keduanya sama.
- Dibuat relasi ekuivalensi di dalam $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

$$(a, b) \simeq (c, d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

Penerapan ke Daerah Integral

- Diberikan daerah intergral R.
- Dibentuk himpunan $S = R \setminus \{0\}$.
- Dibentuk hasil kali Cartes $R \times S$.
- Dibuat relasi ekuivalensi di dalam $R \times S$:

$$(a, b) \simeq (c, d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

- Kelas yang memuat (a, b) dinyatakan dengan $\frac{a}{b}$.
- Himpunan kelas-kelas ekuivalensi yang terjadi di dalam $R \times S$ dinyatakan sebagai R_S.

Struktur R_S

Didefinisikan operasi berikut:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{ad + bc}{bd} \\ \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= \frac{ac}{bd} \end{aligned}$$

untuk setiap $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in R_S$.

- Elemen netral di R_S adalah $\frac{0}{b}$.
- Elemen satuan di R_S adalah $\frac{b}{b}$, dengan $b \neq 0$.
- Invers $\frac{a}{b}$ terhadap penjumlahan adalah $-\frac{a}{b}$.
- Invers $\frac{a}{b}$, $a \neq 0$, terhadap perkalian adalah $\frac{b}{a}$.

Pengamatan selanjutnya

- $(R_S, +, \cdot)$ merupakan lapangan dan disebut lapangan fraksi yang memuat R.
- Terdapat monomorfisma $\varphi : R \to R_S$ dengan definisi $\varphi(r) = \frac{r}{1}$.
- Apakah pembentukan ring fraksi dapat dilakukan untuk sebarang ring komutatif?

TERIMA KASIH