

Lecture Series: Matematika Keuangan  
Universitas Andalas  
Padang, 18 Desember 2017

# Matematika Keuangan Syariah

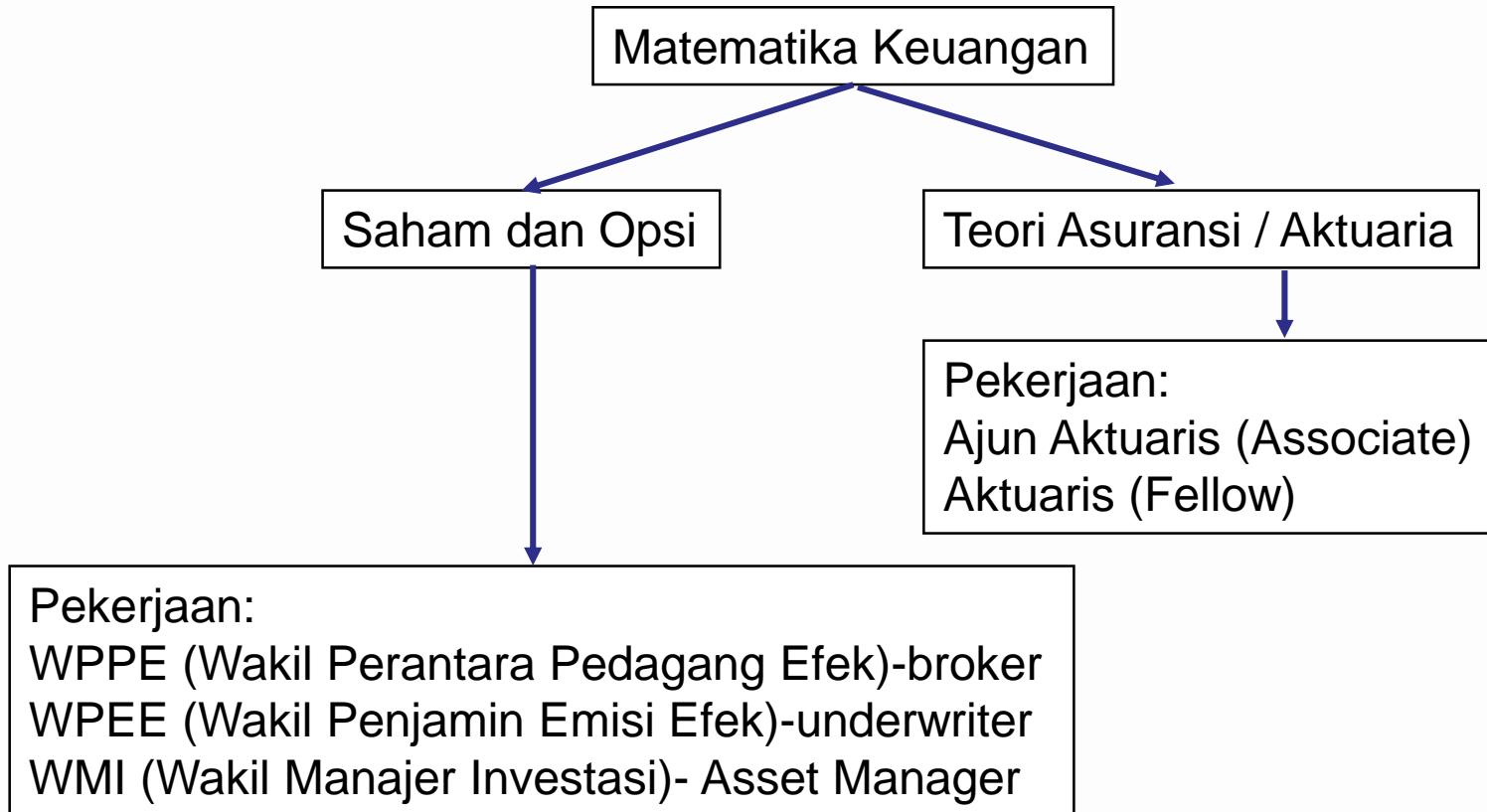
Novriana Sumarti, Ph.D.  
Institut Teknologi Bandung



## **Outline:**

- Sejarah**
- Konsep Dasar**
- Riset Matematika  
Keuangan**
- Matematika Keuangan  
Syariah**

# Pendahuluan



# Sejarah Tokoh Matematika Keuangan

1. Thales (624-547 BC) of Miletus : bentuk awal dari derivative opsi
2. Leonordo of Pisa atau Fibonacci (1170-1240), konsep present value
3. Girolamo Cardano , (1501 –1576) , Blaise Pascal (1623 - 1662) dan Pierre De Fermat (1607-1665) : theory of gambling.
4. Keluarga Bernoulli (abad ke-17 dan awal abad ke-18) : pengembangan teori peluang.
5. Louis Bachelier (1870 - 1946) menurunkan secara matematis model pergerakan saham menggunakan Brownian Motion dan penentuan harga opsi

## Sejarah Tokoh Matematika Keuangan

7. Kiyoshi Ito (1915 - 2008) menemukan Lemma Ito.
8. Harry Markowitz (lahir 1927) membuat Portfolio Selection yang menjadi dasar dari Modern Portfolio Theory.
9. Fischer Black (1938 – 1995), Myron Scholes (lahir 1941) dan Robert Merton (lahir 1944) : Rumus Black-Scholes sebagai model untuk penentuan harga opsi Call dan Put Eropa.

Sejak tahun 1975, semua trader di pasar derivative menggunakan rumus Black-Scholes untuk menghitung harga opsi.

## Beberapa konsep dasar :

### Interest Rates

Jika kita pinjam sejumlah **P** (disebut **Prinsipal**), akan dilunasi pada **waktu T**, dengan **interest rate r** per waktu T, maka jumlah yang harus dilunasi:

$$P + rP = P(1+r)$$

Misal  $P = 100$ ,  $T = 1$  tahun,  $r = 5\%$  per tahun maka jumlah yang harus dibayar  $100(1+0,05)=105$ .

Misal  $P = 100$ ,  $T = n$  tahun, interest rate  $r$  per tahun maka jumlah yang harus dibayar

$$P(1 + r)^n$$

## Analisis Present Value

Misal investasi dengan nominal rate of return  $r$  berlipat (compounded) secara periodik.


Pada akhir periode ke- $i$  harus membayar sebesar  $v$  maka present value (PV) dari uang tersebut adalah

$$PV = \frac{v}{(1+r)^i} = v(1+r)^{-i}$$

### Contoh 1:


Pada akhir tahun selama 5 tahun, sejumlah uang diberikan seperti di bawah ini. Manakah yang paling besar nilainya?

- a. 12, 14, 16, 18, 20
- b. 16, 16, 15, 15, 15
- c. 20, 16, 14, 12, 10



	a	b	c
Jumlah	80	77	72
$r = 0.1$	59.21	58.60	56.33
$r = 0.2$	45.70	46.39	45.69
$r = 0.3$	36.49	37.89	38.12





Alat pengukur ekonomi lain: level dari pasar saham (stock market) yang memberi prakiraan seberapa cerah masa depan ekonomi.

Jika pasar saham tinggi, pendapat umum mengatakan pertumbuhan ekonomi yang cepat, keuntungan tinggi, pengangguran relatif rendah. Jika pasar saham rendah maka biasanya masa depan ekonomi sedang lesu.

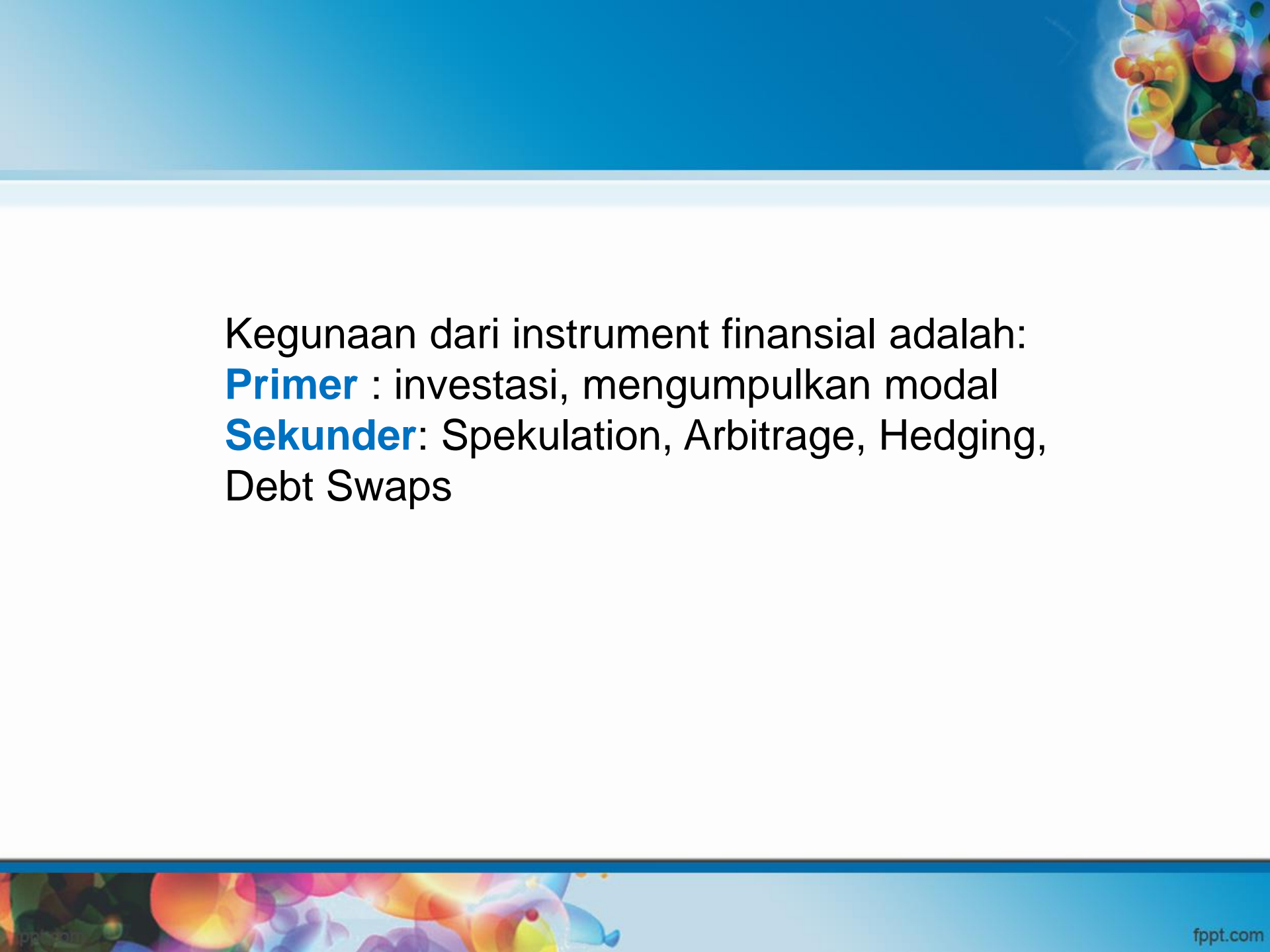


## Beberapa Instrument Finansial:

- Stock (Equities, Securities, Shares)
- Bonds: Corporate, Municipal, Government (Long Term Borrowing)
- Corporate paper, Certificates of Deposit, Treasury Bills (Short Term Borrowing)
- Commodity futures, currency futures, options (derivative securities), (Contingent claims/ Contract: Kontrak/Pengakuan bersyarat)

Setiap instrument diperdagangkan dalam pasar (Market) yang terdiri dari Buyer (pembeli) dan Seller (penjual).





Kegunaan dari instrument finansial adalah:  
**Primer** : investasi, mengumpulkan modal  
**Sekunder**: Spekulasi, Arbitrage, Hedging,  
Debt Swaps

# Model Pergerakan Harga Saham

Pergerakan harga saham tidak berdistribusi normal.

*Return* pada suatu selang waktu  $[t, t + \Delta t]$  diberikan oleh

$$R_t = \frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{S_t}$$

dengan  $S_t$  menyatakan harga saham pada saat  $t$ .



Data harga saham → return dari saham

Formula untuk harga aset saat t adalah

$$S(t) = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\sqrt{t}Z}$$

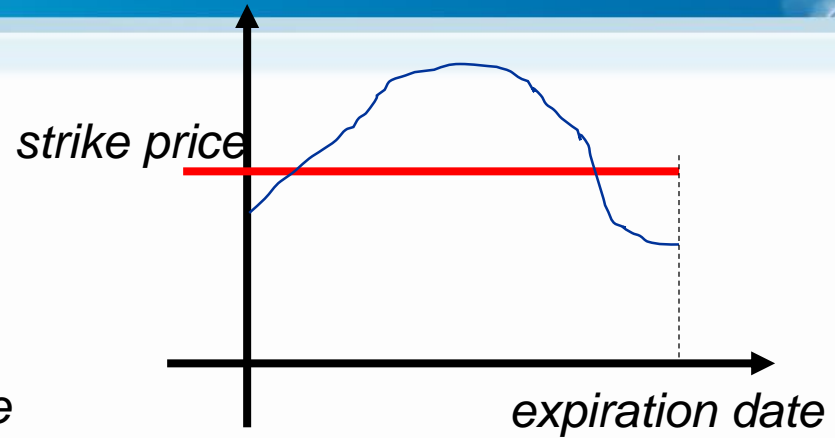
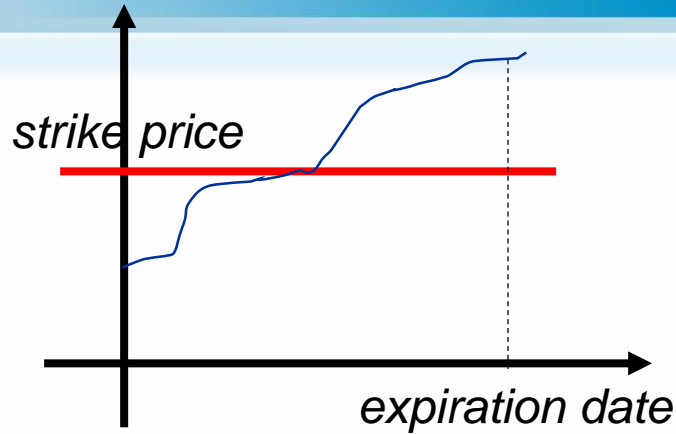
dengan  $Z \sim N(0,1)$ .

## Penentuan Harga Opsi

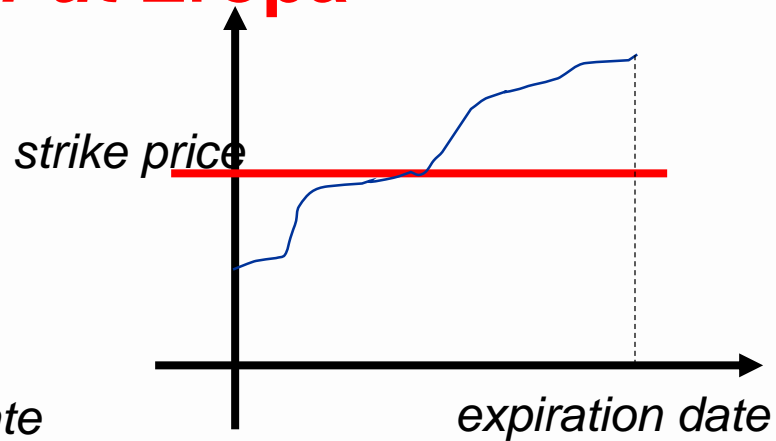
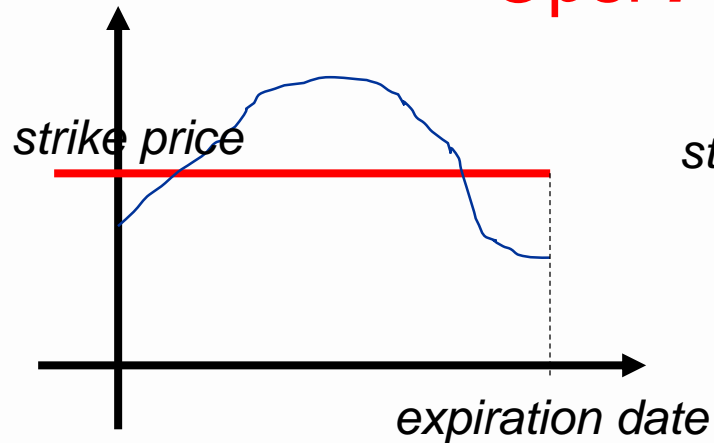
Sebuah opsi **call Eropa** memberikan **hak** kepada pemiliknya (bukan keharusan) untuk **membeli** dari penerbit opsi (*writer*) sebuah saham dengan harga tertentu yang telah disepakati bersama (*strike price*) **pada waktu tertentu** yang akan datang (*expiration date*)

Sebuah opsi **put Eropa** memberikan **hak** kepada pemiliknya (bukan keharusan) untuk **menjual** kepada penerbit opsi (*writer*) sebuah saham dengan harga tertentu yang telah disepakati bersama (*strike price*) **pada waktu tertentu** yang akan datang (*expiration date*)

# Opsi *Call* Eropa



# Opsi *Put* Eropa



## Persamaan diferensial Black-Scholes:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + r S \frac{\partial C}{\partial S} - r C = 0$$

### Asumsi

1. *The market is frictionless.* Tidak ada biaya transaksi (*fees*, pajak), sukubunga pinjaman dan simpanan sama besar, semua pihak mempunyai akses terhadap informasi pasar segera, kredit dan saham tersedia setiap saat dan berapapun besar permintaannya.
2. *No arbitrage opportunities.*
3. Harga saham mengikuti gerak Brown geometrik.
4. Pada periode  $[0, T]$ :  $r$  dan  $\sigma$  konstan, tidak ada pembagian dividen. Opsi Eropa.



## Rumus Black-Scholes untuk harga sebuah opsi *call* Eropa

$$C(S, t) = S N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)$$


dengan

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + r + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi$$

$S(t)$  : harga saham saat  $t$      $K$  : *strike price*     $r$  : suku bunga  
 $T - t$  : waktu sampai jatuh tempo     $\sigma$  : volatilitas saham



Misalkan  $P(S,t)$  menyatakan harga sebuah opsi *put* Eropa untuk saham yang sama dengan *strike price* yang sama dan waktu jatuh tempo yang sama dengan yang dimiliki opsi *call* Eropa, maka dari hubungan *put-call parity* kita peroleh

$$P(S,t) = K e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S N(-d_1)$$

# Keuangan Syariah

Akad adalah kesepakatan dalam suatu perjanjian antara 2 pihak atau lebih untuk melakukan dan/atau tidak melakukan perbuatan hukum tertentu.

Klasifikasi dari akad berdasarkan:

1. Tujuan (Objective) : Tabarru dan Tijarah
2. Keabsahan (Validity) : Sahih/valid, Fasad/voidable, bathal/void
3. Pelaksanaan (implementation) : nafiz/dapat dilaksanakan, mauwqut/rukun lengkap tapi syarat terganggu karena ada hak orang lain pada obyek



## Tujuan Akad (Objectives) :

### 1. Tabarru

Asal kata: tabarra'a (derma/charity).

Cukup dengan ijab dari pemberi saja, lalu harta/dana tabarru berpindah kepemilikannya kepada penerima. Pihak pemberi boleh meminta biaya pengurusan kepada penerima untuk melakukan akad tabarru ini, namun tidak boleh mengambil laba.

### 2. Tijarah (Commerce)

Bersifat komersial, mengambil keuntungan : Investasi, jual beli, dan sewa menyewa (leasing).





Bentuk kontrak kerjasama Bagi Hasil ada 4 akad:

1. Mudharabah
2. Musyarakah
3. Musaqah
4. Muzara'ah/ Mukhabarah

Namun umumnya dipakai 1 dan 2 saja.

Mudharabah (Trustee Profit Sharing)

Investasi antara 2 pihak, pemilik modal dan pengusaha.

Modal diberikan seluruhnya oleh pemilik modal. Keuntungan dibagi dua antara 2 pihak, sedangkan kerugian ditanggung oleh pemilik modal saja.





Musyarakah (joint venture profit and loss sharing)  
Investasi antara 2 pihak, yaitu pemilik modal dan pengusaha. Modal diberikan oleh pemilik modal dan pengusaha, sehingga harta modal bercampur sehingga tidak dapat dibedakan kepemilikannya. Keuntungan dan kerugian dibagi dua antara 2 pihak.

Musaqah dan Muzara'ah/Mukhabarah  
Kerjasama dalam mengelola tanah dan perkebunan, hasilnya dibagi sesuai kesepakatan. Bibit tanaman berasal dari penggarap/petani (Muzara'ah) atau pemilik tanah (Mukhabarah)



# Bagi Hasil dengan nisbah

Praktik investasi harus terhindar dari unsur riba, gharah, maysir dan haram.

Bagaimana menentukan nisbah yang tepat menggunakan model Matematika?

Riset saya [5]:

Model investasi musyarakah dengan pemberian tambahan modal senilai Rp.  $A$  kepada lima pedagang di suatu pasar tradisional di Bandung. Pengembalian modal bersama hasil bagi dengan nisbah  $p$  bila pedagang mengalami keuntungan dilakukan tiap hari selama  $T$  periode. Bagaimana menentukan besar nisbah yang menguntungkan kedua pihak?



Terdapat 3 masalah utama:

1. Penentuan parameter yang menyatakan keuntungan untuk masing-masing pihak.
2. Penentuan fungsi obyektif dalam mengoptimalkan nisbah
3. Pembangkitan data simulasi berdasarkan data real pedagang.

1. Penentuan parameter:

**Investor:**  $r_{syar}$  rate of return dari penerimaan pembayaran tiap

hari  $S_i(p)$ ,  $i = 1, 2, \dots, T$  dari  $A = \frac{S_1(p)}{(1+r_{syar}(p))} + \dots + \frac{S_T(p)}{(1+r_{syar}(p))^T}$ .





Pembayaran angsuran:

$$S_i(p) = I_i + B_i(p) + C_i, \quad i = 1, 2, \dots, T.$$


Angsuran pokok dari modal

$$I_i = \begin{cases} I^*, & w_i > I^* \\ w_i, & 0 < w_i < I^* \\ 0, & w_i \leq 0 \end{cases}$$

dengan  $I^* = \frac{A}{T}$ .

Bagi hasil dengan nisbah  $p$  :

$$B_i = \begin{cases} p(w_i - I_i - C_i), & p(w_i - I_i - C_i) > 0, \\ 0, & p(w_i - I_i - C_i) \leq 0. \end{cases}$$



Pembayaran angsuran yang tertunda karena pedagang sedang mengalami kerugian:

$$C_i = \begin{cases} H_{i-1}, & w_i - I^* \geq H_{i-1} \\ w_i - I^*, & 0 < w_i - I^* < H_{i-1}, \\ 0, & w_i - I^* \leq 0, \end{cases}$$

dimana  $H_{i-1}$  adalah akumulasi angsuran yang belum terbayarkan dari hari sebelumnya.



**Pedagang:** porsi pedagang berupa future value dari jumlah laba yang dibawa pulang.

$$porped_{syar}(p) = \frac{\sum_{i=1}^T FV(w_i - S_i(p))}{\sum_{i=1}^T FV(w_i)}$$

dimana  $w_i$  adalah laba hari ke- $i$  dari perdagangan.

2. Fungsi obyektif untuk mengoptimalkan nisbah:

Terdapat beberapa model keoptimalan yang dapat didefinisikan. Penyelesaian numeriknya dapat menggunakan metode genetika, simulated annealing, swarm optimization, dan lainnya.



Model keoptimalan (1):

$$\max F(p) = \alpha \left( \frac{f(p)}{f_{max}} \right)^2 + (1 - \alpha) \left( \frac{g(p)}{g_{max}} \right)^2$$

$$f(p) = r_{syar}(p) - r_{BI}$$

$$g(p) = porped_{syar}(p) - porped_{rent}$$

$$f_{max} = \max|f(p)|$$

$$g_{max} = \max|g(p)|$$

$\alpha = 0.1, \dots, 1$  merupakan bobot

$porped_{rent}$  merupakan parameter pembanding

Model keoptimalan (2):

$$\max F(p) = \alpha \left( \frac{f(p)}{f_{max}} \right)^2 + (1 - \alpha) \left( \frac{g(p)}{g_{max}} \right)^2$$

$$f(p) = r_{syar}(p) - r_{BI}$$

$$g(p) = porped_{syar}(p) - k porped_{rent}$$

$$f_{max} = \max|f(p)|$$

$$g_{max} = \max|g(p)|$$

$\alpha = 0.1, \dots, 1$  merupakan bobot

$porped_{rent}$  merupakan parameter pembanding

Model keoptimalan (3):

$$\min F(p) = \alpha \left( \frac{f(p)}{f_{max}} \right)^2 + (1 - \alpha) \left( \frac{g(p)}{g_{max}} \right)^2$$

$$f(p) = r_{syar}(p) - n r_{BI}$$

$$g(p) = porped_{syar}(p) - k porped_{rent}$$

$$f_{max} = \max|f(p)|$$

$$g_{max} = \max|g(p)|$$

$\alpha = 0.1, \dots, 1$  merupakan bobot

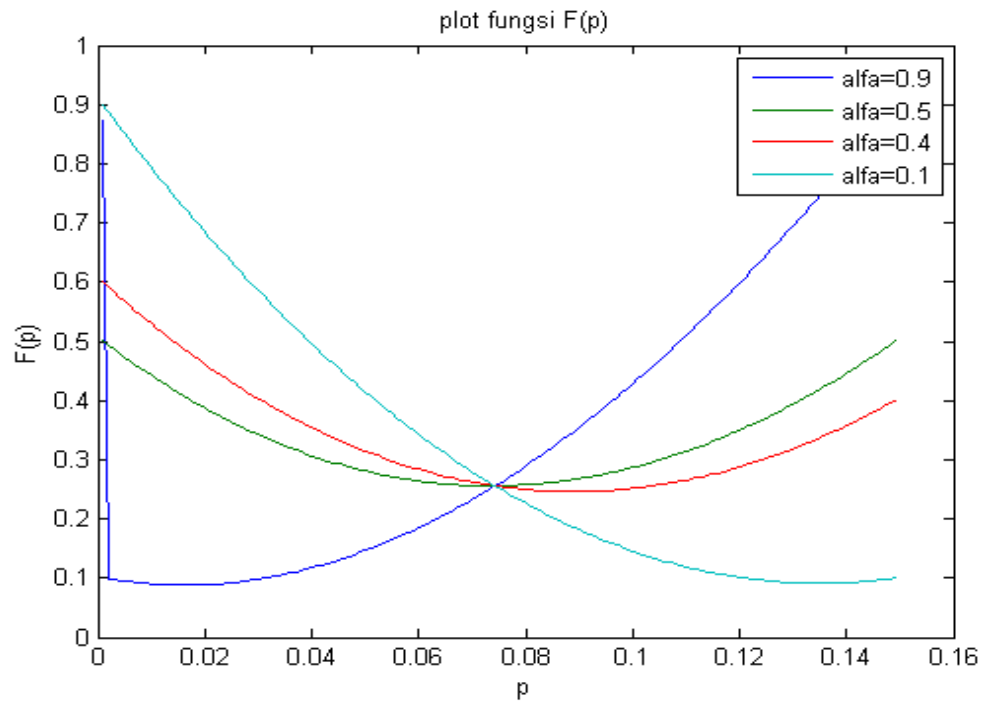
$porped_{rent}$  merupakan parameter pembandingan



### 3. Pembangkitan data simulasi berdasarkan data real pedagang.

Data laba  $w_i$  yang diperoleh hanya berasal dari 5 pedagang dalam periode maksimum 3 bulan. Data simulasi diperlukan untuk validasi model yang sudah didefinisikan. Semua data real diestimasi distribusinya lalu dibangkitkan sebanyak 1000 kali. Fungsi obyektif diimplementasikan pada setiap set data.

# Grafik $p$ vs $F(p)$ model keoptimalan (1) pada simulasi data seorang pedagang





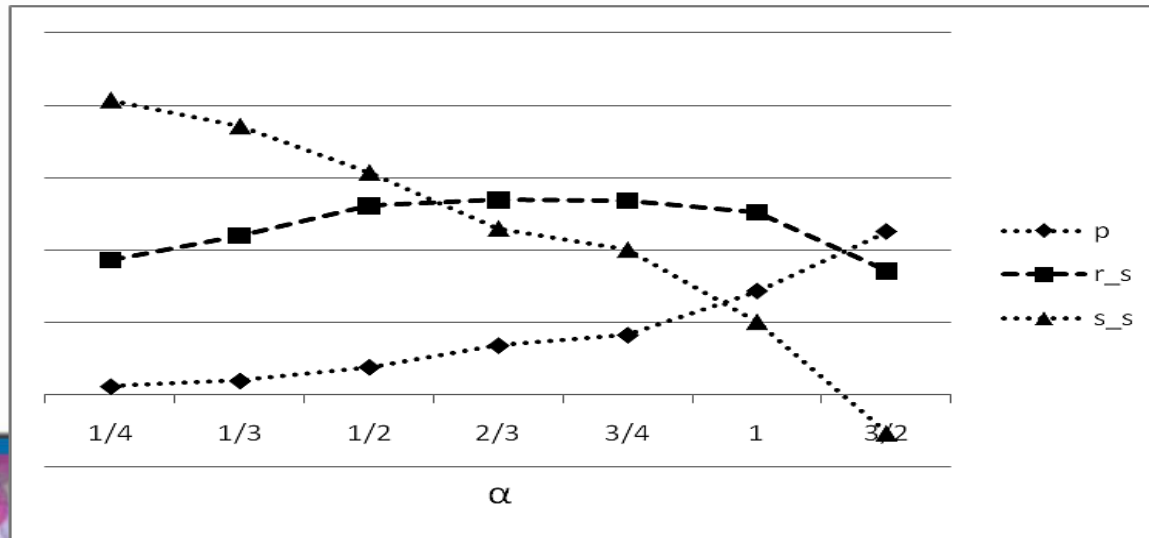



## Beberapa variasi model:

- Panjang periode investasi dan besar dana:

$$A = \sigma T \bar{w}$$

dimana  $\bar{w}$  adalah rata-rata laba harian, T panjang periode,  $\sigma = \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, 1, \frac{3}{2}$ . T=52, 90 dan 180 hari. Grafik berikut nilai  $p, r_{syar}$  dan  $porped_{syar}$  untuk besar dana berbeda.



- 
- Menambah konsep asuransi dengan adanya dana Tabarru' yaitu pembayaran premi oleh pedagang agar bisa tetap membayar angsuran walaupun sedang dalam keadaan rugi.



Penelitian kami yang lain di bidang asuransi/keuangan syariah:

1. Analisis statistika pada data bank syariah di Indonesia.
2. A Stochastic Model on the Allocation of Premium for Sharia Life Insurance.
3. Model keuntungan bank Monti Klein diimplementasikan pada neraca bank syariah.



# Referensi

- [1] <http://aktuaris.or.id/> diakses Agustus 2017.
- [2] <https://kotakpencarian.blogspot.co.id/2016/08/apa-itu-aktuaris-pekerjaan-tugas-fungsi.html> diakses Agustus 2017.
- [3] M. Steensen, 2006. Seven Introductory Lectures on Actuarial Mathematics, Lecture Notes. University of Copenhagen.
- [4] Kellison, Stephen G. The Theory of Interest, 3<sup>rd</sup> edition, Irwin McGraw-Hill, 2009.
- [5] Sumarti, N., et al., Some Problems on Making of Mathematical Modelling of Profit-Loss Sharing Using Data Simulation, *J. Math. Fund. Sci. Vol. 47, No. 1, 2015, 1-11.*
- [6] Muljono, Djoko. 2015. Buku Pintar Akuntansi Perbankan dan Lembaga Keuangan Syariah (A Guide Book on Accounting in Sharia Banking and Financial Institution). Jakarta: Andi.
- [7] Sumarti, N. 2017. A Mathematics Model for Determinating the Value of Ijarah Contract, proceeding of AASEC 2017.