



University of Essex

Laporan Pertanggungjawaban

Student Mobility

University of Essex
United Kingdom
2018





Latar Belakang

UU No. 2 Tahun 1989 Tentang Sistem Pendidikan Nasional (Lembaran Negara Tahun 1989 Nomor 6 Tambahan Lembaran Negara Nomor 3390). Sumber Daya Manusia (SDM) merupakan salah satu faktor terpenting dalam melaksanakan pembangunan bangsa sebagaimana yang diketahui bahwa generasi muda merupakan tongkat estafet sekaligus sebagai pilar bangsa yang memiliki tanggung jawab dan peran yang begitu besar terhadap perkembangan bangsa saat ini dan yang akan datang.

Ilmu pengetahuan dan teknologi khususnya di bidang sains memiliki peranan yang penting dalam kemajuan bangsa dan negara. Saat ini, negara-negara maju seperti Inggris memberikan perhatian yang mendalam terhadap perkembangan sains. Indonesia adalah termasuk salah satu negara berkembang. Tahap menuju negara maju dapat direalisasikan dengan meningkatkan perhatian di bidang pendidikan khususnya sains. Kemajuan tersebut didukung dengan adanya peningkatan mutu dan kualitas pendidikan serta menjamin terlaksananya penelitian-penelitian yang dapat menghasilkan penemuan-penemuan baru yang dapat bermanfaat bagi masyarakat.

Mahasiswa yang bernaung di bidang sains memiliki peranan penting dalam kemajuan dan perkembangan sains kedepannya. Karena mahasiswa sebagai generasi muda yang akan menggerakkan roda pemerintahan di masa yang akan datang. Dari hal tersebut perlu adanya perhatian khusus terhadap mahasiswa terutama dalam rangka Program *Student Mobility* ke luar negeri agar dapat membawa hal yang bermanfaat dari kegiatan tersebut.

Inggris ialah salah satu negara dengan kemajuan sains dan teknologi yang pesat. Selain itu, kedisiplinan masyarakat Inggris sangat baik untuk dicontoh oleh masyarakat Indonesia khususnya Mahasiswa. Hal inilah yang mendasari terjalannya kegiatan *Student Mobility* mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas khususnya Jurusan Matematika dengan Negara Inggris.

Tujuan

Adapun tujuan umum dari kegiatan ini secara garis besar adalah:

1. Mahasiswa Program Studi Matematika Universitas Andalas bisa mengetahui dan merasakan bagaimana sistem pendidikan di Inggris, terkhusus di University of Essex.
2. Mengetahui budaya, etos kerja, dan kedisiplinan masyarakat Negara Inggris.
3. Sebagai sarana pertukaran budaya lokal Sumatera Barat dengan Negara Inggris.
4. Menjalinkan kerjasama antara Program Studi Matematika Universitas Andalas Padang, Indonesia dengan University of Essex, Inggris.

Bentuk Kegiatan

Adapun bentuk dari kegiatan ini adalah:

1. Mengikuti program dari University of Essex di Inggris.
2. Mengikuti perkuliahan di beberapa kelas sesuai dengan disiplin ilmu.
3. Mempelajari kebudayaan Negara Inggris.
4. Melakukan studi penelitian yang dibimbing oleh dosen di Inggris.

Waktu dan Tempat

Kegiatan ini telah dilaksanakan pada :

Tanggal : 15 November – 2 Desember 2018

Tempat : University of Essex, Inggris

Dokumentasi Kegiatan

Lampiran I

Laporan Hasil Belajar

Lampiran II

Penutup

Delegasi mahasiswa terpilih yang mengikuti *Student Mobility* ini bertanggung jawab membawa nama baik Universitas Andalas diajang internasional. Semangat untuk mengharumkan nama baik Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, serta Universitas Andalas dan semangat untuk mencari ilmu dan pengalaman serta motivasi untuk memberikan yang terbaik untuk Universitas Andalas dan Indonesia.

Demikian Laporan Pertanggung Jawaban Pengiriman Delegasi *Student Mobility* 2018 Universitas Andalas Padang ini disusun. Program *Student Mobility* adalah program yang memberikan kontribusi berarti tak hanya bagi mahasiswa yang berpartisipasi namun juga bagi almamater dan citra Indonesia di mata dunia internasional. Semoga keikutsertaan saya dalam program ini mendapat dukungan dari Universitas Andalas dan semoga saya menjadi pemuda yang berguna bagi Bangsa dan Negara Indonesia. Atas perhatian dan bantuan Bapak/Ibu, saya ucapkan terima kasih.

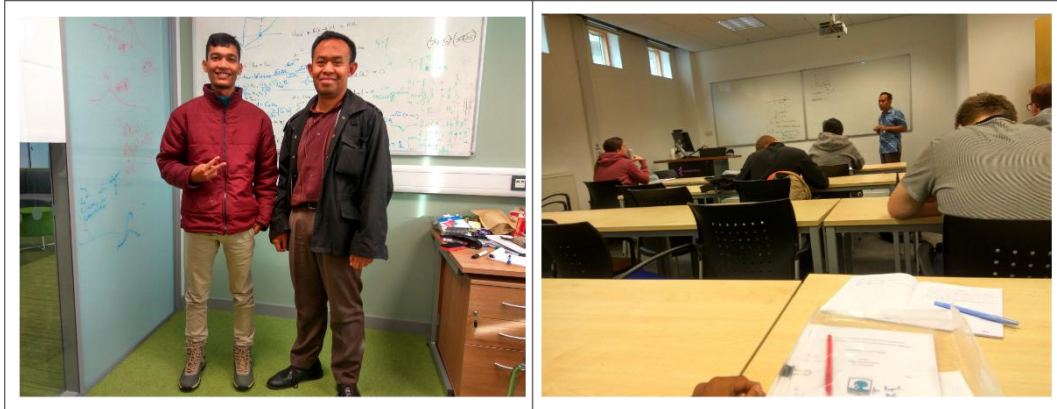
Hormat Saya,

Riski Kurniawan

Lampiran I

Dokumentasi Kegiatan

- **Orientation, study, and discussion in University of Essex**



- **Around the University of Essex**



- Trip to London



Lampiran II

Laporan Hasil Belajar

BAB III

TEOREMA VALIDASI APROKSIMASI

VARIASIONAL PADA PERSAMAAN

SCHRÖDINGER NONLINIER DISKRIT

3.1 Justifikasi Aproksimasi Variasional Stasioner

Pada bab ini akan dibahas justifikasi aproksimasi variasional stasioner. Sebelum diberikan teorema validasi AV pada persamaan SNLD (2.3.3), diberikan beberapa lema berikut.

Lema 3.1.1. *Misalkan $\alpha = (\alpha_i)$ dan $\beta = (\beta_i) \in l^2(\mathbb{Z})$. Jika didefinisikan $\alpha\beta = (\alpha_i\beta_i)$, maka $\|\alpha\beta\|_{l^2} \leq \|\alpha\|_{l^2}\|\beta\|_{l^2}$.*

Bukti. Ambil $\alpha, \beta \in l^2(\mathbb{Z})$ sebarang. Didefinisikan $\alpha\beta = (\alpha_i\beta_i) \in l^2(\mathbb{Z})$. Mudah dibuktikan bahwa untuk setiap $x_i \in \mathbb{R}$ berlaku

$$\sqrt{\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_i|^2} \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_i|. \quad (3.1.1)$$

Berdasarkan pertidaksamaan (3.1.1) dan ketaksamaan Cauchy-Schwarz (2.6.3), maka diperoleh

$$\sqrt{\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha_i\beta_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha_j|^2} \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\beta_k|^2},$$

atau $\|\alpha\beta\|_{l^2} \leq \|\alpha\|_{l^2}\|\beta\|_{l^2}$. □

Lema 3.1.2. Jika $L : l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$ suatu operator yang didefinisikan oleh

$$(L\varphi)_n = (1 - 3\psi_{*n}^2) \varphi_n - \epsilon(\varphi_{n+1} + \varphi_{n-1}), \quad (3.1.2)$$

maka L terbatas.

Bukti. Ambil $\varphi = (\varphi_n) \in l^2(\mathbb{Z})$ sebarang. Perhatikan bahwa

$$\|(\varphi_{n-1})\|_{l^2} = \|(\varphi_{n+1})\|_{l^2} = \|(\varphi_n)\|_{l^2} = \|\varphi\|_{l^2}.$$

Karena untuk setiap n berlaku $-1 \leq \psi_{*n} \leq 1$, maka

$$\text{maks}\{|1 - 3\psi_{*n}^2|\} = 2.$$

Berdasarkan ketaksamaan segitiga dan Lema 2.7.1, diperoleh

$$\begin{aligned} \|L\varphi\|_{l^2} &\leq \text{maks}\{|1 - 3\psi_{*n}^2|\} \|\varphi\|_{l^2} + \epsilon \|(\varphi_{n-1})\|_{l^2} + \epsilon \|(\varphi_{n+1})\|_{l^2} \\ &= 2(1 + \epsilon) \|\varphi\|_{l^2}. \end{aligned}$$

Pilih konstanta $c = 2(1 + \epsilon)$ sedemikian sehingga berlaku $\|L\varphi\|_{l^2} \leq c\|\varphi\|_{l^2}$. \square

Lema 3.1.3. Misalkan $N(\varphi) : l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$ adalah suatu pemetaan pada bola $B_\delta \subset l^2(\mathbb{Z})$ dengan jari-jari $\delta > 0$ berpusat di 0 yang didefinisikan oleh

$$N_n(\varphi) = 3\psi_{*n}\varphi_n^2 + \varphi_n^3, \quad (3.1.3)$$

maka N adalah pemetaan Lipschitz, khususnya terdapat konstanta $C_\delta, D_\delta > 0$ yang bergantung pada $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $\varphi, \varphi' \in B_\delta$ berlaku

$$\|N(\varphi)\|_{l^2} \leq C_\delta \|\varphi\|_{l^2}^2, \quad (3.1.4)$$

dan

$$\|N(\varphi) - N(\varphi')\|_{l^2} \leq D_\delta (\|\varphi\|_{l^2} + \|\varphi'\|_{l^2}) \|\varphi - \varphi'\|_{l^2}. \quad (3.1.5)$$

Bukti. Ambil sebarang $\varphi, \varphi' \in B_\delta$. Akibatnya $\|\varphi\|_{l^2}, \|\varphi'\|_{l^2} \leq \delta$. Berdasarkan ketaksamaan segitiga pada Definisi 2.6.4, Lema 2.7.1 dan Lema 3.1.1 diperoleh

$$\begin{aligned} \|N(\varphi)\|_{l^2} &= \|3\psi_*\varphi^2 + \varphi^3\|_{l^2} \\ &\leq \|3\psi_*\varphi^2\|_{l^2} + \|\varphi^3\|_{l^2} \\ &\leq \text{maks}\{|3\psi_{*n}|\}\|\varphi\|_{l^2}^2 + \|\varphi\|_{l^2}\|\varphi\|_{l^2}^2 \\ &\leq (3 + \delta)\|\varphi\|_{l^2}^2, \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \|N(\varphi) - N(\varphi')\|_{l^2} &= \|3\psi_*(\varphi^2 - \varphi'^2) + (\varphi^3 - \varphi'^3)\|_{l^2} \\ &\leq \|3\psi_*(\varphi^2 - \varphi'^2)\|_{l^2} + \|(\varphi^3 - \varphi'^3)\|_{l^2} \\ &\leq \text{maks}\{|3\psi_{*n}|\}\|\varphi - \varphi'\|_{l^2}\|\varphi + \varphi'\|_{l^2} \\ &\quad + \|\varphi - \varphi'\|_{l^2}\|\varphi^2 + \varphi\varphi' + \varphi'^2\|_{l^2} \\ &\leq (3 + 2\delta)(\|\varphi\|_{l^2} + \|\varphi'\|_{l^2})\|\varphi - \varphi'\|_{l^2}. \end{aligned}$$

Dapat dipilih konstanta $C_\delta = 3 + \delta > 0$ dan $D_\delta = 3 + 2\delta > 0$ yang bergantung pada $\delta > 0$ sedemikian sehingga (3.1.4) dan (3.1.5) terpenuhi. \square

Untuk $\epsilon = 0$, persamaan (3.1.2) dapat ditulis sebagai

$$(L\varphi)_n = (1 - 3\psi_{*n}^2)\varphi_n.$$

Jika L^{-1} ada, maka dengan mudah dapat ditentukan $L^{-1}\varphi$, yaitu diberikan oleh

$$(L^{-1}\varphi)_n = \frac{\varphi_n}{1 - 3\psi_{*n}^2}. \quad (3.1.6)$$

Berdasarkan Lema 2.7.1, diperoleh

$$\|L^{-1}\|_{l^2} = \text{maks} \left\{ \frac{1}{|1 - 3\psi_{*n}^2|} \right\} = 1. \quad (3.1.7)$$

Akibatnya, $\|L^{-1}\|_{l^2} = 1$ untuk setiap $\epsilon > 0$ yang kecil.

Didefinisikan residual dari persamaan SNLD stasioner (2.3.3) sebagai

$$R_n(\psi) = \psi_n^3 - \psi_n + \epsilon(\psi_{n-1} + \psi_{n+1}). \quad (3.1.8)$$

Selanjutnya, didefinisikan operator A yang diberikan oleh

$$A(\varphi) := L^{-1}R(\psi_*) + L^{-1}N(\varphi), \quad (3.1.9)$$

dengan ψ_* adalah hampiran solusi dari ψ . Operator A didefinisikan pada (3.1.9) merupakan kontraksi, yaitu berdasarkan lema berikut.

Lema 3.1.4. *Jika operator $A : B_\delta \rightarrow B_\delta$ didefinisikan pada (3.1.9) dengan L^{-1} diberikan oleh (3.1.6), maka A adalah suatu kontraksi untuk suatu $\delta = \mathcal{O}(\epsilon^p)$.*

Bukti. Ambil $\varphi, \varphi' \in B_\delta$ sebarang. Karena $\|L^{-1}\|_{l^2} = 1$, maka berdasarkan pertidaksamaan (2.6.12) dan Lema 3.1.3 diperoleh

$$\begin{aligned} \|A(\varphi) - A(\varphi')\|_{l^2} &= \|L^{-1}R(\psi_*) + L^{-1}N(\varphi) - L^{-1}R(\psi_*) - L^{-1}N(\varphi')\|_{l^2} \\ &\leq \|L^{-1}(R(\psi_*) - R(\psi_*))\|_{l^2} + \|L^{-1}(N(\varphi) - N(\varphi'))\|_{l^2} \\ &\leq \|L^{-1}\|_{l^2} (\|N(\varphi) - N(\varphi')\|_{l^2}) \\ &\leq D_\delta (\|\varphi\|_{l^2} + \|\varphi'\|_{l^2}) \|\varphi - \varphi'\|_{l^2} \\ &\leq 2D_\delta \delta \|\varphi - \varphi'\|_{l^2}. \end{aligned}$$

Karena $\delta = \mathcal{O}(\epsilon^p)$ bilangan positif yang sangat kecil, maka konstanta $2D_\delta \delta$ juga akan sangat kecil. Akibatnya, $\inf\{2D_\delta \delta\} \leq 1$. Berdasarkan Definisi 2.7.2, maka terbukti bahwa A suatu kontraksi. \square

Selanjutnya akan diberikan justifikasi aproksimasi variasional stasioner sesuai dengan teorema berikut ini.

Teorema 3.1.1. [2] Misalkan ψ_* adalah solusi hampiran dari persamaan SNLD stasioner (2.3.3) sedemikian sehingga

$$\|R(\psi_*)\|_{l^2} = \mathcal{O}(\epsilon^p) \text{ ketika } \epsilon \rightarrow 0 \quad (3.1.10)$$

untuk suatu $p > 0$ dan terdapat suatu himpunan berhingga $S \subset \mathbb{Z}$ dan suatu himpunan biner $\{\sigma_n\}_{n \in S}$ dengan $\sigma_n \in \{+1, -1\}$ sedemikian sehingga

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\| \psi_* - \sum_{n \in S} \sigma_n e_n \right\|_{l^2} = 0, \quad (3.1.11)$$

dimana e_n adalah vektor satuan pada site $n \in \mathbb{Z}$ di $l^2(\mathbb{Z})$. Maka, terdapat $\epsilon_0 > 0$, $C > 0$ dan solusi tunggal persamaan SNLD stasioner (2.3.3) dengan $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ sedemikian sehingga

$$\|\psi - \psi_*\|_{l^2} \leq C\epsilon^p. \quad (3.1.12)$$

Bukti. Didefinisikan φ sebagai selisih antara ψ dan ψ_* . Karena $\psi, \psi_* \in l^2(\mathbb{Z})$, maka $\varphi \in l^2(\mathbb{Z})$.

Substitusikan $\psi = \psi_* + \varphi$ ke (2.3.3), diperoleh

$$(1 - 3\psi_{*n}^2)\varphi_n - \epsilon(\varphi_{n+1} + \varphi_{n-1}) = \psi_{*n}^3 - \psi_{*n} + \epsilon(\psi_{*n+1} + \psi_{*n-1}) + 3\psi_{*n}\varphi_n^2 + \varphi_n^3.$$

Persamaan di atas dapat ditulis kembali sebagai

$$L\varphi = R(\psi_*) + N(\varphi), \quad (3.1.13)$$

dengan $R(\psi_*) \in l^2(\mathbb{Z})$ adalah residual (3.1.8), $L : l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$ adalah operator terbatas berdasarkan Lema 3.1.2 dan $N(\varphi) : l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$ adalah pemetaan Lipschitz pada bola $B_\delta \subset l^2(\mathbb{Z})$ dengan jari-jari $\delta > 0$ dan berpusat di 0 berdasarkan Lema 3.1.3.

Kondisi (3.1.11) mengakibatkan ψ_* merupakan suatu barisan dengan ψ_{*n} mendekati -1 atau 0 atau 1 untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$. Akibatnya, $(1 - 3\psi_{*n}^2)$ mendekati -2 atau 1 . Selanjutnya, pada $\epsilon = 0$ diperoleh $(L\varphi)_n = \varphi_n$ atau $(L\varphi)_n = -2\varphi_n$ yang menunjukkan bahwa spektrum L pada $\epsilon = 0$ hanya memuat 1 atau -2 . Karena spektrum L pada $\epsilon = 0$ tidak memuat nol atau bilangan yang dekat ke nol, maka berdasarkan Lema 2.7.2, operator L mempunyai invers untuk setiap $\epsilon > 0$ yang kecil. Selanjutnya diperoleh $\|L^{-1}\|_{l^2} = 1$. Akibatnya, persamaan (3.1.13) dapat ditulis sebagai operator A yang diberikan pada (3.1.9) dengan $A(\varphi) = \varphi$.

Berdasarkan Lema 3.1.4 diketahui operator A suatu kontraksi untuk suatu $\delta = \mathcal{O}(\epsilon^p)$. Selanjutnya berdasarkan Teorema 2.7.1 (Teorema Titik Tetap Banach) pada Subbab 2.7 operator A mempunyai tepat satu titik tetap. Karena $\|L^{-1}\|_{l^2} = 1$, maka berdasarkan pertidaksamaan (2.6.12), kondisi (3.1.10) dan Lema 3.1.3 diperoleh

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{l^2} &= \|A(\varphi)\|_{l^2} \\
&\leq \|L^{-1}\|_{l^2} (\|R(\psi_*)\|_{l^2} + \|N(\varphi)\|_{l^2}) \\
&\leq \delta + C_\delta \|\varphi\|_{l^2}^2 \\
&\leq \delta + C_\delta \delta^2 \\
&= (\delta^{1/p})^p (1 + C_\delta \delta).
\end{aligned}$$

Jadi, dapat dipilih $\epsilon_0 = \delta^{1/p}$, $C = 1 + C_\delta \delta > 0$ dan karena $\varphi = \psi - \psi_*$, maka terdapat solusi tunggal persamaan SNLD stasioner (2.3.3) dengan $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ sedemikian sehingga pertidaksamaan (3.1.12) terpenuhi. Akibatnya, Teorema 3.1.1 terbukti. \square

3.2 Hampiran Solusi Soliton Diskrit Stasioner

Pandang kembali kembali persamaan SNLD stasioner yang diberikan oleh persamaan (2.3.3). Pada subbab ini akan diturunkan aproksimasi variational (AV) untuk soliton *onsite*, *intersite* dan *twisted* pada persamaan (2.3.3).

Perhatikan bahwa persamaan SNLD stasioner (2.3.3) dapat ditulis kembali sebagai

$$G := \psi_n^3 - \psi_n + \epsilon(\psi_{n-1} + \psi_{n+1}) = 0. \quad (3.2.1)$$

Sebagai langkah pertama dalam metode AV, rumuskan terlebih dahulu Lagrangian dari persamaan (3.2.1), hal ini diberikan oleh lema berikut.

Lema 3.2.1. *Lagrangian dari persamaan (3.2.1) diberikan oleh*

$$\mathcal{L}(\psi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[\frac{1}{2} \psi_n^4 - \psi_n^2 + 2\epsilon \psi_n \psi_{n+1} \right]. \quad (3.2.2)$$

Bukti. Persamaan Euler-Lagrange untuk sistem yang ditinjau adalah

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_n} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_n} = 0.$$

Karena persamaan (3.2.1) stasioner, maka persamaan Euler-Lagrange dari persamaan (3.2.1) adalah

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_n} = 0. \quad (3.2.3)$$

Berikut akan ditunjukkan bahwa persamaan (3.2.3) dengan Lagrangian (3.2.2) akan menghasilkan persamaan (3.2.1). Perhatikan bahwa untuk suatu $n \in \mathbb{Z}$, persamaan (3.2.2) dapat ditulis sebagai

$$\mathcal{L} = \cdots + \frac{1}{2} \psi_{n-1}^4 - \psi_{n-1}^2 + 2\epsilon \psi_{n-1} \psi_n + \frac{1}{2} \psi_n^4 - \psi_n^2 + 2\epsilon \psi_n \psi_{n+1} + \cdots .$$

Karena $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_n} = 0$, maka

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_n} = 2\psi_n^3 - 2\psi_n + 2\epsilon(\psi_{n-1} + \psi_{n+1}) = 0, \quad (3.2.4)$$

yang menghasilkan persamaan (3.2.1). \square

Langkah berikutnya adalah memilih ansatz yang sesuai. Untuk hampiran solusi soliton *onsite*, pilih ansatz

$$\psi_n^{(1)} = Ae^{-\eta|n|}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3.2.5)$$

dengan parameter $A \in \mathbb{R}$ dan $\eta \in \mathbb{R}_+$ yang akan dicari nilainya. Sedangkan untuk hampiran solusi soliton *intersite* dan *twisted* dipilih ansatz

$$\psi_n^{(2)} = \begin{cases} B, & n = 1, \\ Ae^{-\eta(n-2)}, & n \geq 2, \end{cases} \quad (3.2.6)$$

dengan sifat refleksi simetris dan anti-simetris dari $\psi_n^{(2)}$, yaitu

$$\psi_{1-n}^{(2\pm)} = \pm \psi_n^{(2\pm)}, \quad (3.2.7)$$

dengan parameter $A, B \in \mathbb{R}$ dan $\eta \in \mathbb{R}_+$ yang akan dicari nilainya. Refleksi simetris $\psi_n^{(2+)}$ berkaitan dengan soliton *intersite* dan refleksi anti-simetris $\psi_n^{(2-)}$ mendeskripsikan soliton *twisted* dari persamaan SNLD (2.3.3).

Untuk $n \rightarrow \infty$, nilai ψ_n akan sangat kecil. Akibatnya, persamaan (2.3.3) dapat dipandang sebagai

$$-\psi_n = -\epsilon(\psi_{n+1} + \psi_{n-1}). \quad (3.2.8)$$

Dengan mensubstitusikan masing-masing ansatz (3.2.5) dan (3.2.6) ke (3.2.8) diperoleh nilai η yang bergantung pada ϵ , yaitu berdasarkan hubungan

$$1 = \epsilon(e^\eta + e^{-\eta}) \Rightarrow \eta = \operatorname{arccosh} \left(\frac{1}{2\epsilon} \right). \quad (3.2.9)$$

Ekspansi Taylor dari $e^{-\eta}$ di sekitar $\epsilon = 0$ diberikan oleh

$$e^{-\eta} = \epsilon + \epsilon^3 + \mathcal{O}(\epsilon^5). \quad (3.2.10)$$

3.2.1 Hampiran Solusi Soliton *Onsite*

Substitusikan ansatz (3.2.5) ke Lagrangian (3.2.2), dengan menghitung jumlahnya diperoleh Lagrangian efektif

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}(A) = \frac{1}{2}A^4 \coth(2\eta) - A^2 \coth(\eta) + 2\epsilon A^2 \text{csch}(\eta).$$

Dengan menggunakan persamaan (3.2.9), diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}}(A) &= \frac{1}{2}A^4 \coth(2\eta) + A^2 \left(\frac{4\epsilon}{e^\eta - e^{-\eta}} - \frac{e^\eta + e^{-\eta}}{e^\eta - e^{-\eta}} \right) \\ &= \frac{1}{2}A^4 \coth(2\eta) + A^2 \left(\frac{4}{(e^\eta - e^{-\eta})(e^\eta + e^{-\eta})} - \frac{e^\eta + e^{-\eta}}{e^\eta - e^{-\eta}} \right) \\ &= \frac{1}{2}A^4 \coth(2\eta) + A^2 \left(\frac{-e^{2\eta} + 2 - e^{-2\eta}}{(e^\eta - e^{-\eta})(e^\eta + e^{-\eta})} \right) \\ &= \frac{1}{2}A^4 \coth(2\eta) + A^2 \left(\frac{(e^\eta - e^{-\eta})(-e^\eta + e^{-\eta})}{(e^\eta - e^{-\eta})(e^\eta + e^{-\eta})} \right) \\ &= \frac{1}{2}A^4 \coth(2\eta) + A^2 \left(\frac{2e^{-\eta} - (e^\eta + e^{-\eta})}{(e^\eta + e^{-\eta})} \right) \\ &= \frac{1}{2}A^4 \coth(2\eta) + A^2(2\epsilon e^{-\eta} - 1). \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Selanjutnya akan ditentukan titik-titik kritis untuk parameter A dengan menyelesaikan persamaan Euler-Lagrange yaitu $\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial A} = 0$.

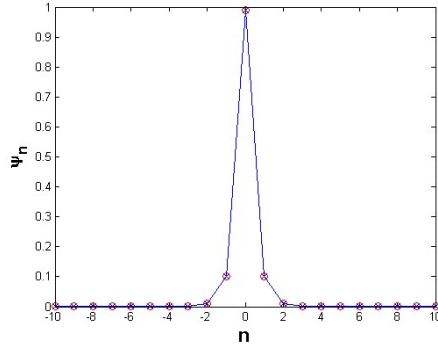
$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial A} = 2A (A^2 \coth(2\eta) - (1 - 2\epsilon e^{-\eta})) = 0.$$

Akibatnya, $A = 0$ (solusi nol) atau

$$A = \sqrt{(1 - 2\epsilon e^{-\eta}) \tanh(2\eta)}. \quad (3.2.12)$$

Ekspansi A disekitar $\epsilon = 0$ diberikan oleh

$$A = 1 - \epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4). \quad (3.2.13)$$



Gambar 3.2.1: Perbandingan solusi soliton *onsite* yang diperoleh secara numerik (garis-bulat merah) dengan aproksimasi variasional (garis-silang biru).

Dengan mensubstitusikan A dan η ke ansatz (3.2.5), diperoleh solusi aproksimasi variasional. Sedangkan solusi numerik dihitung menggunakan aplikasi *Matlab* dengan metode Newton-Raphson. Hasil plot dari solusi variasional dan solusi numerik untuk soliton *onsite* dapat dilihat pada Gambar 3.2.1.

Residual (3.1.8) yang dievaluasi untuk ansatz (3.2.5) diberikan oleh

$$R_n(\psi^{(1)}) = \begin{cases} A(A^2 - 1 + 2\epsilon e^{-\eta}), & n = 0, \\ A^3 e^{-3\eta|n|}, & |n| \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.2.10) dan (3.2.13) ke persamaan di atas, maka diperoleh

$$\begin{aligned} R_0(\psi^{(1)}) &= (1 - \epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4)) (-2\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4) + 2\epsilon(\epsilon + \epsilon^3 + \mathcal{O}(\epsilon^5))) \\ &= (1 - \epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4)) (2\epsilon^4 + \mathcal{O}(\epsilon^5)) \\ &= \mathcal{O}(\epsilon^4), \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
R_n(\psi^{(1)}) &= (1 - 2\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4)) (1 - \epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4)) (\epsilon + \epsilon^3 + \mathcal{O}(\epsilon^5))^{3|n|} \\
&= (1 - 3\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4)) (\epsilon + \epsilon^3 + \mathcal{O}(\epsilon^5))^{3|n|} \\
&= \mathcal{O}(\epsilon^{3|n|}), \quad |n| \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Akibatnya, $\|R(\psi_*)\|_{l^2} = \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{Z}} [R_n(\psi^{(1)})]^2} = \sqrt{\mathcal{O}(\epsilon^6)} = \mathcal{O}(\epsilon^3)$ saat $\epsilon \rightarrow 0$.

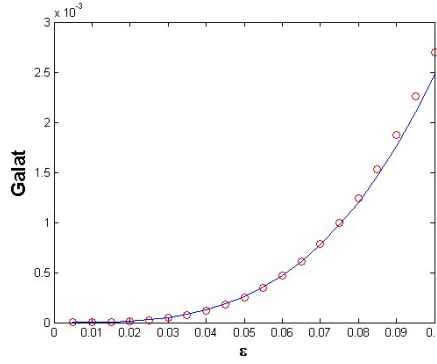
Teorema 3.1.1 selanjutnya menghasilkan proposisi berikut ini untuk soliton *onsite* dengan ansatz (3.2.5).

Proposisi 3.2.1. [2] Misalkan η dan A diberikan oleh (3.2.9) dan (3.2.13).

Maka terdapat $\epsilon_0, C \geq 0$ sedemikian sehingga untuk semua $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ persamaan SNLD stasioner (2.3.3) mempunyai solusi $\psi \in l^2(\mathbb{Z})$ dan memenuhi

$$\|\psi - \psi^{(1)}\|_{l^2} \leq C\epsilon^3. \quad (3.2.14)$$

Untuk memeriksa Proposisi 3.2.1, galat didefinisikan oleh $\|\psi - \psi_*\|_{l^2}$, dengan ψ adalah solusi numerik dan ψ_* adalah solusi variasional. Kemudian, galat yang diperoleh diplot terhadap ϵ . Dengan menggunakan pencocokan kurva pada *Matlab* untuk kurva galat tersebut, diperoleh $f(\epsilon) = 4,39\epsilon^{3,25}$. Hal ini diperlihatkan pada Gambar 3.2.4. Perhatikan bahwa hasil ini memenuhi Proposisi 3.2.1. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa solusi AV untuk soliton *onsite* dengan menggunakan ansatz (3.2.5) adalah valid.



Gambar 3.2.2: Galat untuk soliton *onsite* dan fungsi $4, 39e^{3,25}$.

3.2.2 Hampiran Solusi Soliton *Intersite* dan *Twisted*

Substitusikan ansatz (3.2.6) dengan sifat (3.2.7) ke (3.2.2). Dengan menghitung jumlahnya dan menggunakan persamaan (3.2.9) diperoleh

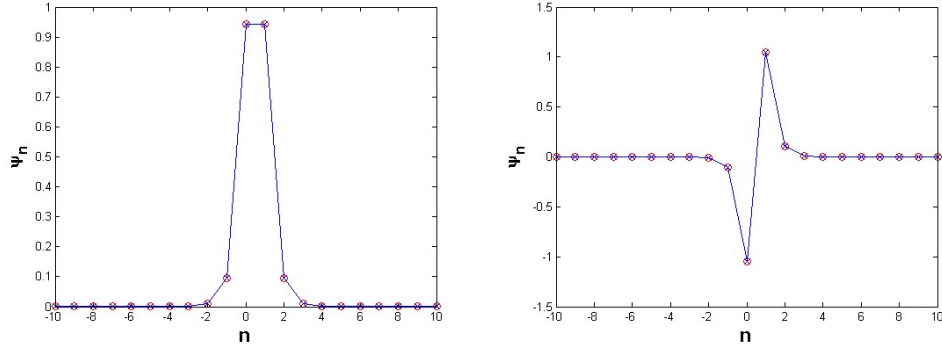
$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{eff}}(A, B) &= \frac{A^4}{1 - e^{-4\eta}} - 2A^2 \frac{(e^\eta - 2\epsilon)}{e^\eta - e^{-\eta}} + B^4 - 2B^2(1 \mp \epsilon) + 4\epsilon AB \\
 &= \frac{A^4}{1 - e^{-4\eta}} - 2A^2 \frac{e^{2\eta} - 1}{(e^\eta - e^{-\eta})(e^\eta + e^{-\eta})} + B^4 - 2B^2(1 \mp \epsilon) + 4\epsilon AB \\
 &= \frac{A^4}{1 - e^{-4\eta}} - 2A^2 \frac{(e^\eta - e^{-\eta})e^\eta}{(e^\eta - e^{-\eta})(e^\eta + e^{-\eta})} + B^4 - 2B^2(1 \mp \epsilon) + 4\epsilon AB \\
 &= \frac{A^4}{1 - e^{-4\eta}} - 2A^2 \frac{e^\eta + e^{-\eta} - e^{-\eta}}{e^\eta + e^{-\eta}} + B^4 - 2B^2(1 \mp \epsilon) + 4\epsilon AB \\
 &= \frac{A^4}{1 - e^{-4\eta}} - 2A^2(1 - \epsilon e^{-\eta}) + B^4 - 2B^2(1 \mp \epsilon) + 4\epsilon AB. \quad (3.2.15)
 \end{aligned}$$

Selanjutnya akan ditentukan titik-titik kritis untuk parameter A dan B dengan menyelesaikan persamaan Euler-Lagrange yaitu $\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial A} = 0$ dan $\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial B} = 0$.

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial A} = \frac{A^3}{1 - e^{-4\eta}} - A(1 - \epsilon e^{-\eta}) + \epsilon B = 0, \quad (3.2.16)$$

dan

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial B} = (B^2 - 1)B + \epsilon A \pm \epsilon B = 0. \quad (3.2.17)$$



Gambar 3.2.3: Perbandingan solusi soliton *intersite* (kiri) dan *twisted* (kanan) yang diperoleh secara numerik (garis-bulat merah) dengan aproksimasi variasional (garis-silang biru).

Nilai A dan B dapat dihitung menggunakan aplikasi *Matlab* dengan metode Newton-Raphson (bahasa program dapat dilihat di Lampiran). Selanjutnya, dengan mensubstitusikan nilai A , B dan η ke ansatz (3.2.6) dengan sifat (3.2.7), diperoleh solusi aproksimasi variasional soliton *intersite* dan *twisted*. Sedangkan solusi numerik dihitung menggunakan aplikasi *Matlab* dengan metode Newton-Raphson. Hasil plot dari solusi variasional dan solusi numerik untuk soliton *intersite* dan *twisted* dapat dilihat pada Gambar 3.2.3.

Di sisi lain, solusi asimtotik dari (3.2.16) dan (3.2.17) dapat dicari dengan terlebih dahulu menuliskan parameter A dan B dalam bentuk ekspansi

$$A = a_0 + a_1\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad B = b_0 + b_1\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.2.18)$$

Dengan mensubstitusikan (3.2.10) dan (3.2.18) ke (3.2.16) dan (3.2.17), kemudian mengelompokkan suku-sukunya berdasarkan pangkat ϵ , diperoleh

$$B = 1 \mp \frac{\epsilon}{2} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad A = \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.2.19)$$

Selanjutnya, residual (3.1.8) dievaluasi untuk ansatz (3.2.6) dengan sifat pada (3.2.7), sehingga diperoleh

$$R_n(\psi^{(2\pm)}) = \begin{cases} (B^2 - 1)B + \epsilon A \pm \epsilon B, & n = 1, \\ (A^2 - 1 + \epsilon e^{-\eta})A + \epsilon B, & n = 2, \\ A^3 e^{-3\eta|n-2|}, & |n| \geq 3. \end{cases}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.2.10) dan (3.2.19) ke persamaan di atas, maka diperoleh

$$R_1(\psi^{(2\pm)}) = (\mp\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)) \left(1 \mp \frac{\epsilon}{2} + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) + \epsilon \left(\pm 1 + \frac{\epsilon}{2} + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) = 0,$$

$$R_2(\psi^{(2\pm)}) = -\frac{(\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2))^3 (\epsilon + \epsilon^3 + \mathcal{O}(\epsilon^5))^4}{1 - (\epsilon + \epsilon^3 + \mathcal{O}(\epsilon^5))^4} = \mathcal{O}(\epsilon^7),$$

dan

$$R_n(\psi^{(2\pm)}) = (\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2))^3 (\epsilon + \epsilon^3 + \mathcal{O}(\epsilon^5))^{3|n-2|} = \mathcal{O}(\epsilon^{3(n-1)}), \quad n \geq 3.$$

Akibatnya, $\|R(\psi_*)\|_{l^2} = \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{Z}} [R_n(\psi^{(2\pm)})]^2} = \sqrt{\mathcal{O}(\epsilon^{12})} = \mathcal{O}(\epsilon^6)$ saat $\epsilon \rightarrow 0$.

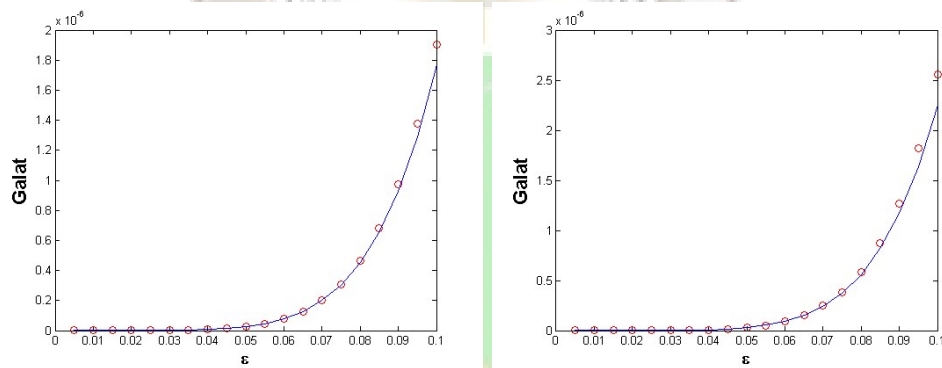
Teorema 3.1.1 selanjutnya menghasilkan proposisi berikut ini untuk solusi *intersite* dan *twisted* dengan ansatz (3.2.6) dengan sifat (3.2.7).

Proposisi 3.2.2. [2] Misalkan η, A , dan B diberikan oleh (3.2.9), (3.2.16) dan (3.2.17), dengan solusi (A, B) yaitu pada (3.2.19). Maka terdapat $\epsilon_0, C \geq 0$ sedemikian sehingga untuk semua $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ persamaan SNLD stasioner (2.3.3) mempunyai solusi $\psi \in l^2(\mathbb{Z})$ dan memenuhi

$$\|\psi - \psi^{(2\pm)}\|_{l^2} \leq C\epsilon^6. \quad (3.2.20)$$

Untuk memeriksa Proposisi 3.2.2, nilai dari galat didefinisikan oleh $\|\psi - \psi_*\|_{l^2}$, dengan ψ adalah solusi numerik dan ψ_* adalah solusi variasional.

Kemudian, galat yang diperoleh diplot terhadap ϵ . Dengan menggunakan pencocokan kurva (*best power fit*) pada *Matlab* untuk kurva galat tersebut, diperoleh $f(\epsilon) = 2,31\epsilon^{6,12}$ (untuk soliton *intersite*) dan $f(\epsilon) = 3,69\epsilon^{6,22}$ (untuk soliton *twisted*). Hal ini diperlihatkan pada Gambar 3.2.4 (kiri untuk soliton *intersite* dan kanan untuk soliton *twisted*). Perhatikan bahwa hasil-hasil ini memenuhi Proposisi 3.2.2. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa solusi AV untuk soliton *intersite* dan *twisted* dengan menggunakan ansatz (3.2.6) dengan sifat (3.2.7) adalah valid.



Gambar 3.2.4: Galat untuk soliton *intersite* dan fungsi $2,31\epsilon^{6,12}$ (kiri) dan galat untuk soliton *twisted* dan fungsi $3,69\epsilon^{6,22}$ (kanan).

Dr. Hadi Susanto
Adjunct Professor in Mathematics (ITB, Indonesia)
Director of Research
Senior Lecturer in Applied Mathematics
Department of Mathematical Sciences
University of Essex
Wivenhoe Park, Colchester
Essex CO43SQ
United Kingdom
T: +44 (0) 1206 872689
E: h.susanto@essex.ac.uk

Mr. Riski Kurniawan
Department of Mathematics
Faculty of Mathematics and Natural Sciences,
Andalas University
Limau Manis, Padang, 25163 Indonesia

5 February 2019

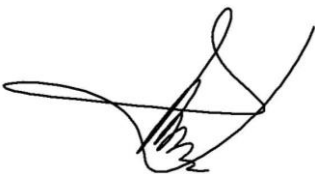
Dear Mr. Riski,

This is to confirm that you have participated in the Student Mobility programme, organised by Andalas University and the University of Essex for the period of 16 – 30 November 2018.

You worked with me on a research project on discrete Nonlinear Schroedinger equations, in collaboration with Dr. Mahdhivan Syafwan and Dr. Haripamyu. As part of your visit, we anticipate to write a paper draft that shall be submitted for publication in an internationally recognise journal.

Should you require any further information, please do not hesitate to contact me.

Kind regards,



Hadi Susanto