DIMENSI METRIK DARI GRAF HASIL KALI SISIR-SISI

Suhadi Wido Saputro

Erma Suwastika

Pritta Etriana Putri

DIMENSI METRIK

- Pada penelitian ini semua graf G hingga, terhubung, dan sederhana.
- Notasi V merupakan himpunan titik dari G dan E adalah himpunan sisi dari G.
- Jarak antara dua titik $u, v \in V(G)$, dinotasikan oleh $d_G(u, v)$, yaitu panjang lintasan terpendek dari u ke v di G.
- Misalkan $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ adalah himpunan terurut dari $V(G)$.

DIMENSI METRIK

- *Representasi* dari titik *v* di *G* terhadap *W* didefinisikan sebagai *k*-tupel $r(v|W) = \left(d_G(v, w_1), d_G(v, w_2), \ldots, d_G(v, w_k)\right)$.
- Himpunanan *W* disebut *himpunan pembeda* dari *G* jika setiap dua titik berbeda $x, y \in V(G)$ memenuhi $r(x|W) \neq r(y|W)$.
- Suatu *basis* dari *G* adalah himpunan pembeda dari *G* dengan kardinalitas terkecil, sedangkan *dimensi metrik* dari *G* merujuk pada kardinalitasnya, dinotasikan oleh $\beta(G)$.

PENELITIAN SEBELUMNYA

- **Teorema 1 (Chartrand dkk., 2000):**

  Misalkan G graf terhubung berorde $n \geq 2$*, maka*

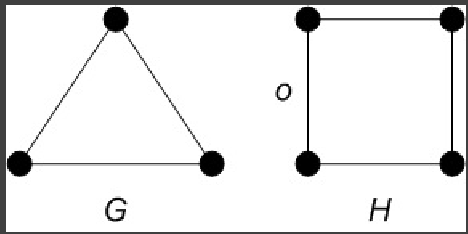
  1. $\beta(G) = 1$ *jika dan hanya jika* $G = P_n$,
  2. $\beta(G) = n - 1$ *jika dan hanya jika* $G = K_n$,
  3. $\beta(G) = n - 2$ *jika dan hanya jika G adalah* $K_{r,s}$ *untuk* $r, s \geq 1$, *atau* $K_r + \overline{K_s}$ *untuk* $r \geq 1$, $s \geq 2$, *atau* $K_r + (K_1 \cup K_s)$ *untuk* $r, s \geq 1$.

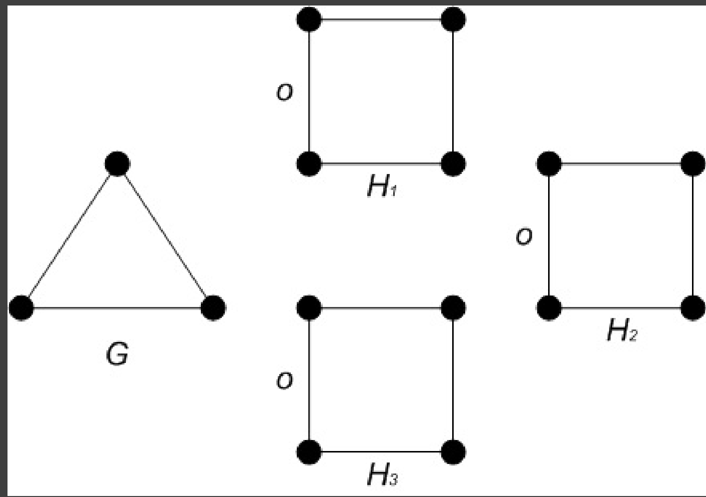
- Saputro dkk. (2017) meneliti “Dimensi Metrik dari Graf Hasil Kali Sisir”.

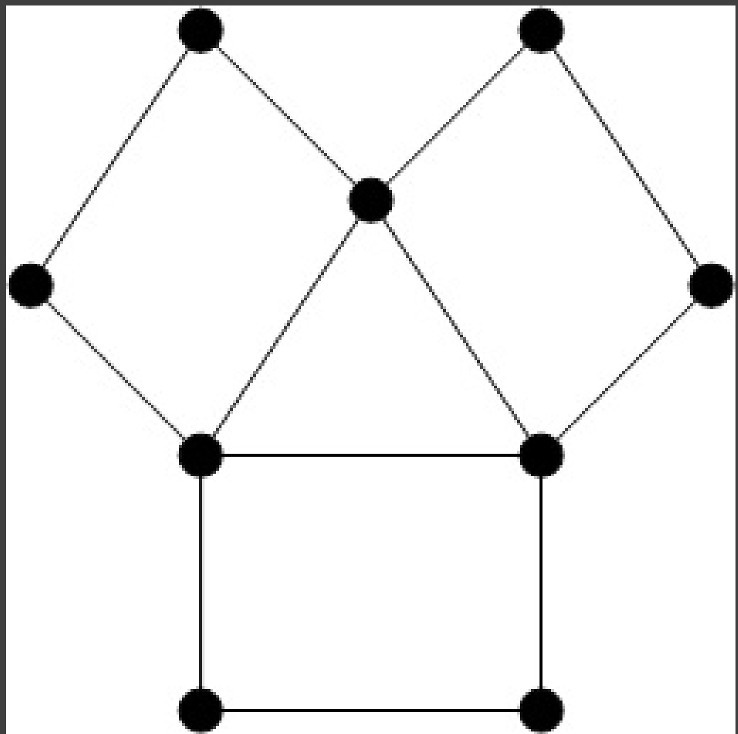
GRAF HASIL KALI SISIR-SISI

- Misalkan *G* dan *H* adalah graf terhubung.
- Misalkan *o* adalah suatu sisi dari *H*.
- *Hasil kali sisir-sisi* antara *G* dan *H*, dinotasikan oleh $G \trianglerighteq_o H$, adalah graf yang diperoleh dengan mengambil satu salinan dari *G* dan $|E(G)|$ salinan dari *H* dan menempelkan sisi *o* pada salinan ke-*i* dari *H* ke sisi ke-*i* pada salinan dari *G* .

GRAF HASIL KALI SISIR-SISI





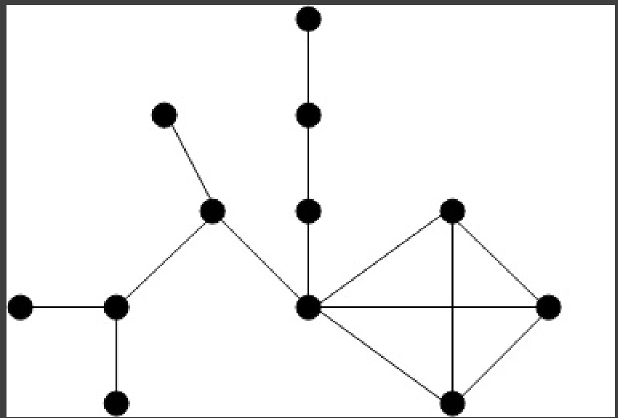


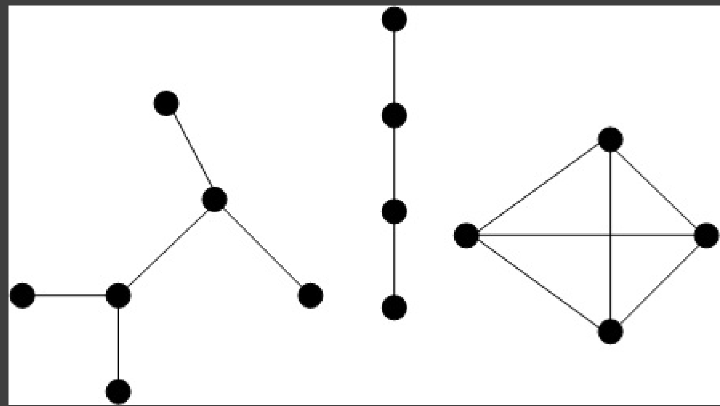
$$G \trianglerighteq_o H$$

CABANG

- Misalkan v adalah titik dari G.
- *Cabang* dari G di v didefinisikan sebagai suatu himpunan maksimal dari G yang isomorf dengan suatu pohon dan memuat v sebagai suatu titik ujung (daun).
- Jika derajat dari v adalah k, maka v mempunyai paling banyak k cabang berbeda.

EXAMPLE





LINTASAN CABANG

- Cabang dari *v* yang isomorph dengan lintasan disebut *lintasan cabang* dari *v*.
- Banyaknya lintasan cabang dari *v* dinotasikan $b(v)$.
- Jika derajat dari *v* adalah 3 dan *v* memiliki setidaknya 2 lintasan cabang, maka *v* disebut *batang* of *G*.
- Misalkan $\mathcal{A}(v)$ adalah himpunan semua sisi di lintasan cabang dari *v*.

DEFINISI LAINNYA

- Misalkan $o = o_1 o_2$ dengan $o_1, o_2 \in V(H)$ dan o merupakan jembatan.
- Misalkan $H \backslash \{o\} = H_1 \cup H_2$ dengan $o_i \in V(H_i)$ untuk $i = 1,2$.
- Misalkan $\mathcal{B}(o_i)$ adalah semua lintasan cabang dari o_i in H_i.
- Definisikan Q_i sebagai subgraph terinduksi dari H_i oleh $V(H_i) \backslash \left(V\left(\mathcal{B}(o_i)\right) \backslash \{o_i\}\right)$.
- Misalkan $q_1(v)$ adalah banyaknya subgraf terinduksi yang disjoin dari $G \trianglerighteq_o H$ yang isomorf dengan Q_1 di v dan $q_2(v)$ adalah banyaknya subgraf terinduksi yang disjoin dari $G \trianglerighteq_o H$ yang isomorph dengan Q_2 di v.
- Definisikan $\eta(v) = q_1(v) + q_2(v) + b(v)$.

HASIL

Teorema 2:

Misalkan G dan H graf terhubung dengan ukuran setidaknya 2. Misalkan o adalah jembatan dari H dengan $o = o_1 o_2$. *Misalkan* $H \backslash \{o\} = \mathcal{B}(o_1) \cup \mathcal{B}(o_2)$. *Jika* $Z \subset V(G \trianglerighteq_o H)$ *semua titik di Z berasal dari G, maka*

$$\beta(G \trianglerighteq_o H) = \sum_{z \in Z} (b(z) - 1)$$

LEMA

- **Lema 1:**

  Misalkan G suatu graf terhubung dan v adalah batang dari G yang mempunyai $k \geq 2$ *lintasan cabang. Jika W adalah himpunan pembeda dari G, maka* $|\mathcal{A}(v) \cap W| \geq k - 1.$

- **Lema 2:**

  Misalkan G suatu graf terhubung dan v adalah batang dari G yang mempunyai $k \geq 2$ *lintasan cabang. Terdapat himpunan pembeda W dari G sehingga* $|\mathcal{A}(v) \cap W| = k - 1.$

- **Lema 3:**

  Misalkan G suatu graf terhubung dan v adalah batang dari G yang mempunyai $k \geq 2$ *lintasan cabang. Misalkan W adalah himpunan pembeda dari G yang memenuhi* $|\mathcal{A}(v) \cap W| = k - 1$*, setiap dua titik berbeda di* $\mathcal{A}(v) \cap W$ *berasal dari lintasan cabang yang berbeda dari v.*

HASIL LAINNYA

- **Teorema 3:**

  Misalkan G and H graf terhubung dengan ukuran setidaknya 2. Misalkan o adalah suatu jembatan di H. Misalkan $Z \subset V(G \trianglerighteq_o H)$ dengan semua titik di Z berasal dari G. Jika $|E(G)| = m$, maka

$$m(\beta(Q_1) + \beta(Q_2) - 2) \leq \beta(G \trianglerighteq_o H)$$

$$\leq m\big(\beta(Q_1) + \beta(Q_2)\big) + \sum_{z \in Z} (\eta(z) - 1)$$

- **Teorema 4:**

  Misalkan G graf terhubung dengan ukuran setidaknya 2. Terdapat suatu graf terhubung H dengan ukuran setidaknya 2 sehingga

$$\beta(G \trianglerighteq_o H) = m\big(\beta(Q_1) + \beta(Q_2)\big) + \sum_{z \in Z} (\eta(z) - 1)$$

HASIL LAINNYA

- **Teorema 5:**

  Misalkan G dan H graf terhubung dengan ukuran setidaknya 2. Misalkan $|E(G)| = m$. *Misalkan o adalah suatu jembatan di H. Misalkan* $Z \subset V(G \trianglerighteq_o H)$ *dengan semua titik di Z berasal dari G. Jika* $\beta(G \trianglerighteq_o H) = m(\beta(Q_1) + \beta(Q_2) - 2)$, *maka* $Q_1 \neq \emptyset$ *dan* $Q_2 \neq \emptyset$.

- **Teorema 6:**

  Misalkan G graf terhubung dengan ukuran setidaknya 2. Terdapat suatu graf terhubung H dengan ukuran 2 sehingga

  $$\beta(G \trianglerighteq_o H) = m(\beta(Q_1) + \beta(Q_2) - 2)$$

  dengan o adalah suatu jembatan di H dan $|E(G)| = m$.

HASIL LAINNYA

Teorema 7:

Misalkan G dan H graf terhubung dengan ukuran setidaknya 2. Misalkan $Z \subset V(G \trianglerighteq_o H)$ *dengan semua titik di Z berasal dari G. Jika* $|E(G)| = m$ *dan* Q_1 *atau* Q_2 *adalah himpunan kosong, maka*

$$\beta(G \trianglerighteq_o H) \geq m(\beta(Q_1) + \beta(Q_2) - 1)$$

REFERENSI

[1] G. Chartrand, L. Eroh, M. A. Johnson, and O. R. Oellermann, Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph, *Discrete Appl. Math.,* **105** (2000), 99-113.

[2] S. W. Saputro, N. Mardiana, and I. A. Purwasih, The metric dimension of comb product graphs, *Mat. Vesnik,* **69**, 4 (2017), 248-258.