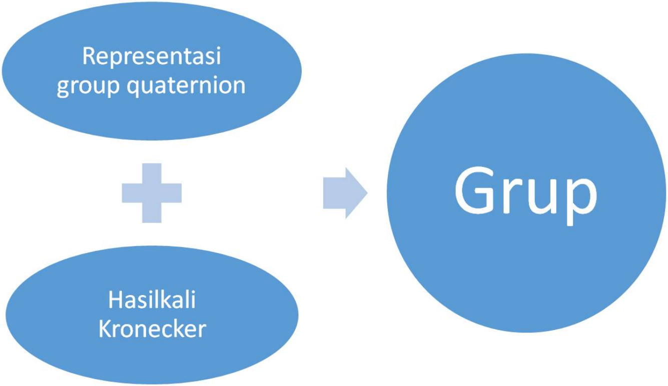
Grup Hasil Kronstruksi dari Hasilkali Kronecker Pada Representasi Grup Quaternion

Oleh
Yanita
Universitas Andalas Padang

Seminar Nasional Komunitas Peminat Aljabar
Padang 8-9 November 2018


Representasi group quaternion
Hasilkali Kronecker
Grup

Representasi Grup Quaternion dan Hasilkali Kronecker

- Grup quaternion Q_8 dapat direpresentasikan sebagai subgrup dari grup linier $GL_2(\mathbb{C})$. Representasi ini diberikan oleh :
$1 \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, i \mapsto \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, j \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, k \mapsto \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix},$
$-1 \mapsto \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, -i \mapsto \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, -j \mapsto \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$
$-k \mapsto \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$
- Hasilkali Kronecker : Misalkan $A \in M_{mn}(F)$ dan $B \in M_{st}(F)$. Matriks $mp \times nq$ yang didefinisikan dengan $[a_{ij}B]$ disebut sebagai hasilkali kronecker$A$ dan B, biasanya disimbolkan dengan $A \otimes B$.

Representasi Grup Quaternion dan Hasilkali Kronecker

- **Langkah1** : Misalkan masing-masing bentuk representasi diberi simbol sebagai berikut :
  $I \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_1 \mapsto \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, B_1 \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B_3 \mapsto \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix},$
  $B_4 \mapsto \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B_5 \mapsto \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, B_6 \mapsto \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$
  $B_7 \mapsto \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$
- **Langkah2** : lakukan hasilkali Kronecker pada masing masing matriks di Langkah 1 ke ssetiap matriks (setiap matriks pada Langkah 1 terdapat 8 kali proses hasilkali Kronecker.
- **Langkah3** : Daftarkan seluruh matriks yang diperoleh pada Langkah 2
- **Langkah4** : Buat Tabel Cayley untuk matriks-matriks yang diperoleh pada Langkah 3 dengan operasi perkalian matriks.

Matriks yang diperoleh dari Hasilkali Kroneceker pada Representasi grup quaternion

$$A_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}, A_2=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}, A_3=\begin{bmatrix}i&0&0&0\\0&-i&0&0\\0&0&i&0\\0&0&0&-i\end{bmatrix}, A_4=\begin{bmatrix}-i&0&0&0\\0&i&0&0\\0&0&-i&0\\0&0&0&i\end{bmatrix},$$

$$A_5=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{bmatrix}, A_6=\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{bmatrix}, A_7=\begin{bmatrix}0&i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&i\\0&0&i&0\end{bmatrix}, A_8=\begin{bmatrix}0&-i&0&0\\-i&0&0&0\\0&0&0&-i\\0&0&-i&0\end{bmatrix},$$

$$A_9=\begin{bmatrix}i&0&0&0\\0&i&0&0\\0&0&-i&0\\0&0&0&-i\end{bmatrix}, A_{10}=\begin{bmatrix}-i&0&0&0\\0&-i&0&0\\0&0&i&0\\0&0&0&i\end{bmatrix}, A_{11}=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}, A_{12}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

$$A_{13}=\begin{bmatrix}0&i&0&0\\-i&0&0&0\\0&0&0&-i\\0&0&i&0\end{bmatrix}, A_{14}=\begin{bmatrix}0&-i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&i\\0&0&-i&0\end{bmatrix}, A_{15}=\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}, A_{16}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{bmatrix},$$

$$A_{17}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{bmatrix}, A_{18}=\begin{bmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}, A_{19}=\begin{bmatrix}0&0&i&0\\0&0&0&-i\\-i&0&0&0\\0&i&0&0\end{bmatrix}, A_{20}=\begin{bmatrix}0&0&-i&0\\0&0&0&i\\i&0&0&0\\0&-i&0&0\end{bmatrix},$$

$$A_{21}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}, A_{22}=\begin{bmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{bmatrix}, A_{23}=\begin{bmatrix}0&0&0&i\\0&0&i&0\\0&-i&0&0\\-i&0&0&0\end{bmatrix}, A_{24}=\begin{bmatrix}0&0&0&-i\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\i&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$A_{25}=\begin{bmatrix}0&0&i&0\\0&0&0&i\\i&0&0&0\\0&i&0&0\end{bmatrix}, A_{26}=\begin{bmatrix}0&0&-i&0\\0&0&0&-i\\-i&0&0&0\\0&-i&0&0\end{bmatrix}, A_{27}=\begin{bmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}, A_{28}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{bmatrix}$$

$$A_{29}=\begin{bmatrix}0&0&0&i\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\-i&0&0&0\end{bmatrix}, A_{30}=\begin{bmatrix}0&0&0&-i\\0&0&i&0\\0&-i&0&0\\i&0&0&0\end{bmatrix}, A_{31}=\begin{bmatrix}0&0&0&-1\\0&0&-1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{bmatrix}, A_{32}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

Tabel Cayley

×	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23	A24	A25	A26	A27	A28	A29	A30	A31	A32
A1	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23	A24	A25	A26	A27	A28	A29	A30	A31	A32
A2	A2	A1	A4	A3	A6	A5	A8	A7	A10	A9	A12	A11	A14	A13	A16	A15	A18	A17	A20	A19	A22	A21	A24	A23	A26	A25	A28	A27	A30	A29	A32	A31
A3	A3	A4	A2	A1	A7	A8	A6	A5	A11	A12	A10	A9	A15	A16	A14	A13	A19	A20	A18	A17	A23	A24	A22	A21	A27	A28	A26	A25	A31	A32	A30	A29
A4	A4	A3	A1	A2	A8	A7	A5	A6	A12	A11	A9	A10	A16	A15	A13	A14	A20	A19	A17	A18	A24	A23	A21	A22	A28	A27	A25	A26	A32	A31	A29	A30
A5	A5	A6	A8	A7	A2	A1	A3	A4	A13	A14	A16	A15	A10	A9	A11	A12	A21	A22	A24	A23	A26	A17	A19	A20	A29	A30	A32	A31	A26	A25	A27	A28
A6	A6	A5	A7	A8	A1	A2	A4	A3	A14	A13	A15	A16	A9	A10	A12	A11	A22	A21	A23	A24	A17	A18	A20	A19	A30	A29	A31	A32	A25	A26	A28	A27
A7	A7	A8	A5	A6	A4	A3	A2	A1	A15	A16	A13	A14	A12	A11	A10	A9	A23	A24	A21	A22	A20	A19	A18	A17	A31	A32	A29	A30	A28	A27	A26	A25
A8	A8	A7	A6	A5	A3	A4	A1	A2	A16	A15	A14	A13	A11	A12	A9	A10	A24	A23	A22	A21	A19	A20	A17	A18	A32	A31	A30	A29	A27	A28	A25	A26
A9	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A2	A1	A4	A3	A6	A5	A8	A7	A25	A26	A27	A28	A29	A30	A31	A32	A18	A17	A20	A19	A22	A21	A24	A23
A10	A10	A9	A12	A11	A14	A13	A16	A15	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A26	A25	A28	A27	A30	A29	A32	A31	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23	A24
A11	A11	A12	A10	A9	A15	A16	A14	A13	A4	A3	A1	A2	A8	A7	A5	A6	A27	A28	A26	A25	A31	A32	A30	A29	A20	A19	A17	A18	A24	A23	A21	A22
A12	A12	A11	A9	A10	A16	A15	A13	A14	A3	A4	A2	A1	A7	A8	A6	A5	A28	A27	A25	A26	A32	A31	A29	A30	A19	A20	A18	A17	A23	A24	A22	A21
A13	A13	A14	A16	A15	A10	A9	A11	A12	A6	A5	A7	A8	A1	A2	A4	A3	A29	A30	A32	A31	A26	A25	A27	A28	A22	A21	A23	A24	A17	A18	A20	A19
A14	A14	A13	A15	A16	A9	A10	A12	A11	A5	A6	A8	A7	A2	A1	A3	A4	A30	A29	A31	A32	A25	A26	A28	A27	A21	A22	A24	A23	A18	A17	A19	A20
A15	A15	A16	A13	A14	A12	A11	A10	A9	A8	A7	A6	A5	A3	A4	A1	A2	A31	A32	A29	A30	A28	A27	A26	A25	A24	A23	A22	A21	A19	A20	A17	A18
A16	A16	A15	A14	A13	A11	A12	A9	A10	A7	A8	A5	A6	A4	A3	A2	A1	A32	A31	A30	A29	A27	A28	A25	A26	A23	A24	A21	A22	A20	A19	A18	A17
A17	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23	A24	A26	A25	A28	A27	A30	A29	A32	A31	A2	A1	A4	A3	A6	A5	A8	A7	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16
A18	A18	A17	A20	A19	A22	A21	A24	A23	A25	A26	A27	A28	A29	A30	A31	A32	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A10	A9	A12	A11	A14	A13	A16	A15
A19	A19	A20	A18	A17	A23	A24	A22	A21	A28	A27	A25	A26	A32	A31	A29	A30	A4	A3	A1	A2	A8	A7	A5	A6	A11	A12	A10	A9	A15	A16	A14	A13
A20	A20	A19	A17	A18	A24	A23	A21	A22	A27	A28	A26	A25	A31	A32	A30	A29	A3	A4	A2	A1	A7	A8	A6	A5	A12	A11	A9	A10	A16	A15	A13	A14
A21	A21	A22	A24	A23	A18	A17	A19	A20	A30	A29	A31	A32	A25	A26	A28	A27	A6	A5	A7	A8	A1	A2	A4	A3	A13	A14	A16	A15	A10	A9	A11	A12
A22	A22	A21	A23	A24	A17	A18	A20	A19	A29	A30	A32	A31	A26	A25	A27	A28	A5	A6	A8	A7	A2	A1	A3	A4	A14	A13	A15	A16	A9	A10	A12	A11
A23	A23	A24	A21	A22	A20	A19	A18	A17	A32	A31	A30	A29	A27	A28	A25	A26	A8	A7	A6	A5	A3	A4	A1	A2	A15	A16	A13	A14	A12	A11	A10	A9
A24	A24	A23	A22	A21	A19	A20	A17	A18	A31	A32	A29	A30	A28	A27	A26	A25	A7	A8	A5	A6	A4	A3	A2	A1	A16	A15	A14	A13	A11	A12	A9	A10
A25	A25	A26	A27	A28	A29	A30	A31	A32	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23	A24	A10	A9	A12	A11	A14	A13	A16	A15	A2	A1	A4	A3	A6	A5	A8	A7
A26	A26	A25	A28	A27	A30	A29	A32	A31	A18	A17	A20	A19	A22	A21	A24	A23	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
A27	A27	A28	A26	A25	A31	A32	A30	A29	A19	A20	A18	A17	A23	A24	A22	A21	A12	A11	A9	A10	A16	A15	A13	A14	A4	A3	A1	A2	A8	A7	A5	A6
A28	A28	A27	A25	A26	A32	A31	A29	A30	A20	A19	A17	A18	A24	A23	A21	A22	A11	A12	A10	A9	A15	A16	A14	A13	A3	A4	A2	A1	A7	A8	A6	A5
A29	A29	A30	A32	A31	A26	A25	A27	A28	A21	A22	A24	A23	A18	A17	A19	A20	A14	A13	A15	A16	A9	A10	A12	A11	A6	A5	A7	A8	A1	A2	A4	A3
A30	A30	A29	A31	A32	A25	A26	A28	A27	A22	A21	A23	A24	A17	A18	A20	A19	A13	A14	A16	A15	A10	A9	A11	A12	A5	A6	A8	A7	A2	A1	A3	A4
A31	A31	A32	A29	A30	A28	A27	A26	A25	A23	A24	A21	A22	A20	A19	A18	A17	A16	A15	A14	A13	A11	A12	A9	A10	A8	A7	A6	A5	A3	A4	A1	A2
A32	A32	A31	A30	A29	A27	A28	A25	A26	A24	A23	A22	A21	A19	A20	A17	A18	A15	A16	A13	A14	A12	A11	A10	A9	A7	A8	A5	A6	A4	A3	A2	A1

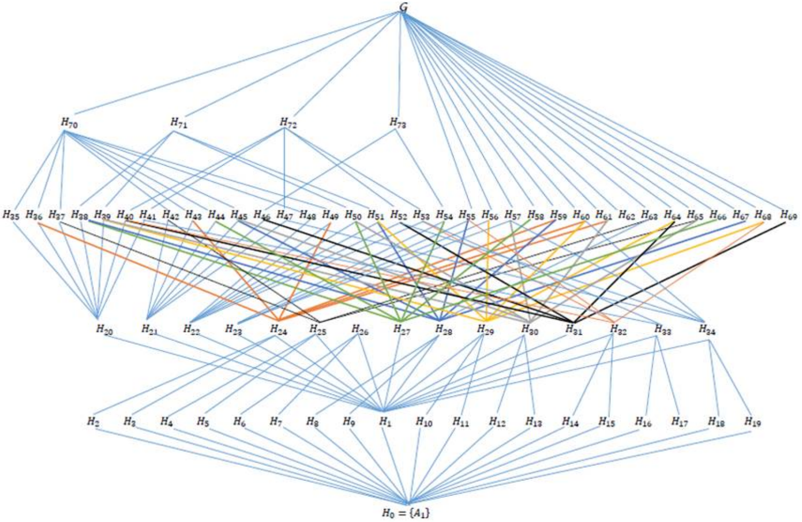
Representasi Grup Quaternion dan Hasilkali Kronecker

- Himpunan semua matriks yang diperoleh dari Hasilkali Kronecker pada representasi grup quaternion adalah grup dengan operasi perkalian matriks biasa, dimisalkan dengan $\mathcal{G}$, yaitu

$$\mathcal{G} = \{A_k = [a_{ij}] | i, j = 1, 2, \cdots, 32\}$$

- Grup ini adalah grup non abelian berorde 32, dengan jumlah subgrup sejati 72 dengan seluruh subgrup adalah normal dan 25 diantaranya adalah subgrup siklik.
- Grup ini memiliki dua unsur sebagai sentral, yaitu A_1 dan A_2.
- Grup ini memiliki 32 kelas konjugasi, yaitu setiap unsur merupakan kelas konjugasi.

Diagram Lattice untuk subgrup dari $\mathcal{G}$



Analisis grup $\mathcal{G}$

- Dedekind $\rightarrow$ ya
- Solvabel $\rightarrow$ ya
- Nilpoten $\rightarrow$ tidak
- Metasiklik $\rightarrow$ tidak
- Supersolvabel $\rightarrow$ tidak
- Polisiklik $\rightarrow$ tidak
- Monolitik $\rightarrow$ tidak

Tipe unsur-unsur $\mathcal{G}$

Perhatikan bahwa unsur-unsur pada $\mathcal{G}$ mempunyai tipe sebagai berikut :

- Unsur-unsur yang bersifat $a^2 = e$ (e adalah unsur identitas), yaitu
  $A_1, A_2, A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{15}, A_{16}, , A_{19}, A_{20}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{24}, A_{27}, A_{28}, A_{29}, A_{30}, A_{30}, A_{31}, A_{32}.$
- Unsur-unsur yang bersifat $a^4 = e$, yaitu
  $A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{17}, A_{18}, A_{25}, A_{25}$, dan untuk setiap
  $a, b \in A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{17}, A_{18}, A_{25}, A_{25}$
  memiliki sifat $a^2 = b^2$

Selanjutkan perhatikan pola pada tabel berikut

×	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23	A24	A25	A26	A27	A28	A29	A30	A31	A32
A1	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23	A24	A25	A26	A27	A28	A29	A30	A31	A32
A2	A2	A1	A4	A3	A6	A5	A8	A7	A10	A9	A12	A11	A14	A13	A16	A15	A18	A17	A20	A19	A22	A21	A24	A23	A26	A25	A28	A27	A30	A29	A32	A31
A3	A3	A4	A2	A1	A7	A8	A6	A5	A11	A12	A10	A9	A15	A16	A14	A13	A19	A20	A18	A17	A23	A24	A22	A21	A27	A28	A26	A25	A31	A32	A30	A29
A4	A4	A3	A1	A2	A8	A7	A5	A6	A12	A11	A9	A10	A16	A15	A13	A14	A20	A19	A17	A18	A24	A23	A21	A22	A28	A27	A25	A26	A32	A31	A29	A30
A5	A5	A6	A8	A7	A2	A1	A3	A4	A13	A14	A16	A15	A10	A9	A11	A12	A21	A22	A24	A23	A26	A17	A19	A20	A29	A30	A32	A31	A26	A25	A27	A28
A6	A6	A5	A7	A8	A1	A2	A4	A3	A14	A13	A15	A16	A9	A10	A12	A11	A22	A21	A23	A24	A17	A18	A20	A19	A30	A29	A31	A32	A25	A26	A28	A27
A7	A7	A8	A5	A6	A4	A3	A2	A1	A15	A16	A13	A14	A12	A11	A10	A9	A23	A24	A21	A22	A20	A19	A18	A17	A31	A32	A29	A30	A28	A27	A26	A25
A8	A8	A7	A6	A5	A3	A4	A1	A2	A16	A15	A14	A13	A11	A12	A9	A10	A24	A23	A22	A21	A19	A20	A17	A18	A32	A31	A30	A29	A27	A28	A25	A26
A9	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A2	A1	A4	A3	A6	A5	A8	A7	A25	A26	A27	A28	A29	A30	A31	A32	A18	A17	A20	A19	A22	A21	A24	A23
A10	A10	A9	A12	A11	A14	A13	A16	A15	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A26	A25	A28	A27	A30	A29	A32	A31	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23	A24
A11	A11	A12	A10	A9	A15	A16	A14	A13	A4	A3	A1	A2	A8	A7	A5	A6	A27	A28	A26	A25	A31	A32	A30	A29	A20	A19	A17	A18	A24	A23	A21	A22
A12	A12	A11	A9	A10	A16	A15	A13	A14	A3	A4	A2	A1	A7	A8	A6	A5	A28	A27	A25	A26	A32	A31	A29	A30	A19	A20	A18	A17	A23	A24	A22	A21
A13	A13	A14	A16	A15	A10	A9	A11	A12	A6	A5	A7	A8	A1	A2	A4	A3	A29	A30	A32	A31	A26	A25	A27	A28	A22	A21	A23	A24	A17	A18	A20	A19
A14	A14	A13	A15	A16	A9	A10	A12	A11	A5	A6	A8	A7	A2	A1	A3	A4	A30	A29	A31	A32	A25	A26	A28	A27	A21	A22	A24	A23	A18	A17	A19	A20
A15	A15	A16	A13	A14	A12	A11	A10	A9	A8	A7	A6	A5	A3	A4	A1	A2	A31	A32	A29	A30	A28	A27	A26	A25	A24	A23	A22	A21	A19	A20	A17	A18
A16	A16	A15	A14	A13	A11	A12	A9	A10	A7	A8	A5	A6	A4	A3	A2	A1	A32	A31	A30	A29	A27	A28	A25	A26	A23	A24	A21	A22	A20	A19	A18	A17
A17	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23	A24	A26	A25	A28	A27	A30	A29	A32	A31	A2	A1	A4	A3	A6	A5	A8	A7	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16
A18	A18	A17	A20	A19	A22	A21	A24	A23	A25	A26	A27	A28	A29	A30	A31	A32	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A10	A9	A12	A11	A14	A13	A16	A15
A19	A19	A20	A18	A17	A23	A24	A22	A21	A28	A27	A25	A26	A32	A31	A29	A30	A4	A3	A1	A2	A8	A7	A5	A6	A11	A12	A10	A9	A15	A16	A14	A13
A20	A20	A19	A17	A18	A24	A23	A21	A22	A27	A28	A26	A25	A31	A32	A30	A29	A3	A4	A2	A1	A7	A8	A6	A5	A12	A11	A9	A10	A16	A15	A13	A14
A21	A21	A22	A24	A23	A18	A17	A19	A20	A30	A29	A31	A32	A25	A26	A28	A27	A6	A5	A7	A8	A1	A2	A4	A3	A13	A14	A16	A15	A10	A9	A11	A12
A22	A22	A21	A23	A24	A17	A18	A20	A19	A29	A30	A32	A31	A26	A25	A27	A28	A5	A6	A8	A7	A2	A1	A3	A4	A14	A13	A15	A16	A9	A10	A12	A11
A23	A23	A24	A21	A22	A20	A19	A18	A17	A32	A31	A30	A29	A27	A28	A25	A26	A8	A7	A6	A5	A3	A4	A1	A2	A15	A16	A13	A14	A12	A11	A10	A9
A24	A24	A23	A22	A21	A19	A20	A17	A18	A31	A32	A29	A30	A28	A27	A26	A25	A7	A8	A5	A6	A4	A3	A2	A1	A16	A15	A14	A13	A11	A12	A9	A10
A25	A25	A26	A27	A28	A29	A30	A31	A32	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23	A24	A10	A9	A12	A11	A14	A13	A16	A15	A2	A1	A4	A3	A6	A5	A8	A7
A26	A26	A25	A28	A27	A30	A29	A32	A31	A18	A17	A20	A19	A22	A21	A24	A23	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
A27	A27	A28	A26	A25	A31	A32	A30	A29	A19	A20	A18	A17	A23	A24	A22	A21	A12	A11	A9	A10	A16	A15	A13	A14	A4	A3	A1	A2	A8	A7	A5	A6
A28	A28	A27	A25	A26	A32	A31	A29	A30	A20	A19	A17	A18	A24	A23	A21	A22	A11	A12	A10	A9	A15	A16	A14	A13	A3	A4	A2	A1	A7	A8	A6	A5
A29	A29	A30	A32	A31	A26	A25	A27	A28	A21	A22	A24	A23	A18	A17	A19	A20	A14	A13	A15	A16	A9	A10	A12	A11	A6	A5	A7	A8	A1	A2	A4	A3
A30	A30	A29	A31	A32	A25	A26	A28	A27	A22	A21	A23	A24	A17	A18	A20	A19	A13	A14	A16	A15	A10	A9	A11	A12	A5	A6	A8	A7	A2	A1	A3	A4
A31	A31	A32	A29	A30	A28	A27	A26	A25	A23	A24	A21	A22	A20	A19	A18	A17	A16	A15	A14	A13	A11	A12	A9	A10	A8	A7	A6	A5	A3	A4	A1	A2
A32	A32	A31	A30	A29	A27	A28	A25	A26	A24	A23	A22	A21	A19	A20	A17	A18	A15	A16	A13	A14	A12	A11	A10	A9	A7	A8	A5	A6	A4	A3	A2	A1

Presentasi grup $\mathcal{G}$

Berdasarkan pola pada tabel Cayley dan tipe unsur-unsur pada grup $\mathcal{G}$, maka generator dari presentasi grup $\mathcal{G}$ ada 4 buah, misalkan a, b, c, d. Relasi yang memenuhi generatornya sebagai berikut :

- Relasi berdasarkan tipe unsur untuk presentasi grup $\mathcal{G}$ adalah $a^4 = e, b^4 = e, c^2 = e$, dan $d^2 = e$ atau $a^4 = b^4 = c^2 = d^2 = e$, $a^2 = b^2$
- Relasi yang dapat menghubungkan seluruh unsur adalah $ab = ba^{-1}, acd = dca^{-}, bcd = dcb^{-1}$.

Berdasarkan relasi ini diperoleh presentasi grup untuk $\mathcal{G}$, adalah

$$P = \langle a, b, c, d | a^4 = b^4 = c^2 = d^2, a^2 = b^2, ab = ba^{-1}, acd = dca^{-1}, bcd = dcb^{-1} \rangle$$

Jadi unsur dalam presentasi grup $\mathcal{G}$ adalah

$\bullet e, a, b, c, d$	$\bullet a^3, b^3, c^2, d^3$
$\bullet ab, a^2b, a^3b$	$\bullet ac, a^2c, a^3c$
$\bullet ad, a^2d, a^3d$	$\bullet bc, a^2bc, a^3bc$
$\bullet bd, a^2bd, a^3bd$	$\bullet cd, a^2cd, a^3cd$
$\bullet abc, abd, acd, bcd$	$\bullet abcd$

KAJIAN LANJUT

Generalisasi dari presentasi grup ini adalah $P = \langle a, b, c, d | a^{2n} = b^{2n} = c^n = d^n, a^n = b^n, ab = ba^{-1}, acd = dca^{-1}, bcd = dcb^{-1} \rangle$ untuk $n > 2$.

Pengembangan lainnya pada

- Grup fundamental pertama $\pi_1(P = \langle a, b, c, d | a^4 = b^4 = c^2 = d^2, a^2 = b^2, ab = ba^{-1}, acd = dca^{-1}, bcd = dcb^{-1} \rangle)$
- Grup fundamental kedua $\pi_2(P = \langle a, b, c, d | a^4 = b^4 = c^2 = d^2, a^2 = b^2, ab = ba^{-1}, acd = dca^{-1}, bcd = dcb^{-1} \rangle)$

TERIMA KASIH